

Glava 2

Nizovi i skupovi realnih brojeva

Centralno mesto u matematičkoj analizi pripada pojmu granične vrednosti, odnosno limesa. Upoznaćemo se sa definicijom limesa niza i sa tehnikama nalaženja graničnih vrednosti. Razmatraćemo i nekoliko važnih osobina skupova realnih brojeva, koje su u vezi sa pojmom limesa. U ovoj glavi izložićemo i jednu jednostavnu metodu za numeričko rešavanje jednačina, zajedno sa njenom teorijskom osnovom.

- *Prebrojivi i neprebrojivi skupovi* • *Realni nizovi*
- *Tri (na prvi pogled) teorijske teme* • *Osobine skupova realnih brojeva*
 - *Zadaci*

2.1. Prebrojivi i neprebrojivi skupovi

Nekad davno, u praistoriji, nekom pastiru je palo na pamet da ureže po jedan zarez u odlomljenu granu drveta, za svaku ovcu koja je njegova; na taj način je mogao da, krajem dana, ustanovi da li su mu sve ovce na broju. To je bilo rođenje pojma prirodnog broja, fascinantna zamisao, koja je dovela do matematike koju danas poznajemo. Nije nam teško da shvatimo prirodne brojeve, jer smo naučeni na njima od detinjstva. Jedan prst, dva prsta, tri prsta. Dva oka. Dve ruke. Tri sestre. Ali, trebali su milenijumi da se dođe do te jednostavne apstrakcije. Izrečeno današnjim jezikom, za svaki konačan skup postoji bijekcija¹ koja ga preslikava na jedan skup $\{1, 2, \dots, n\}$; na taj način utvrđujemo da skup ima n elemenata. Skupove poredimo po broju elemenata: skup koji ima 7 elemenata je veći od skupa koji ima 3 elementa.

Matematička analiza se, uglavnom, bavi beskonačnim skupovima. Skup prirodnih brojeva, $\mathbb{N}$, ili skup realnih brojeva, $\mathbb{R}$, su primeri takvih skupova, koji nam se čine dobro poznatim. Prirodni brojevi su nam bliži od realnih, ali matematičari znaju da u skupu prirodnih brojeva postoji možda i više enigme nego u skupu realnih. Jedan takav poznati primer jeste FERMATova poslednja teorema², koja je dokazana tek 1993. godine, posle 350 godina bezuspešnih pokušaja najčuvanijih svetskih matematičara. Osim toga, veliki prirodni brojevi su van naše intuicije. Teško je shvatiti kolika količina se nalazi u 2^{64} zrna pšenice sve dok se ne uporedi sa nečim što nam je poznato (videti stranu 42).

Beskonačni skupovi mogu se porediti po broju elemenata, na sličan način kao i konačni. Za beskonačan skup S realnih brojeva kažemo da je **prebrojiv skup** ako postoji bijekcija između skupa S i skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. To praktično znači da elemente skupa S možemo označiti sa $x_1, x_2, x_3, \dots$, u obliku jednog beskonačnog niza.

Skup prirodnih brojeva je prebrojiv, a pored njega, prebrojivi su i skupovi parnih, neparnih ili celih brojeva. Na primer, između skupa prirodnih i skupa celih brojeva može se uspostaviti sledeća bijekcija:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & 5 & \dots \end{array}$$

Po istom pravilu, možemo porediti bilo kakve beskonačne skupove. Isto kao što svakom konačnom skupu možemo pridružiti jedan prirodan broj, broj njegovih elemenata, tako i beskonačnim skupovima pridružujemo jednu oznaku koju zovemo kardinalni broj.

¹Videti definiciju bijekcije na strani 9.

²Ova teorema tvrdi da ne postoje prirodni brojevi x, y, z , za koje bi važilo da je $x^k + y^k = z^k$, ako je $k \geq 3$.

Definicija 2.1. Kažemo da skupovi A i B imaju **isti kardinalni broj**, u oznaci $\text{card } A = \text{card } B$, ako postoji bijektivno preslikavanje koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.

Ako postoji bijekcija koja preslikava skup A na neki pravi podskup skupa B , a ne postoji bijekcija koja preslikava skup B na skup A ili na neki njegov podskup, kažemo da skup A ima manji kardinalni broj od skupa B .

Ako se skup A sastoji od n elemenata ($n \in \mathbb{N}$), kažemo da je $\text{card } A = n$.

Postojanje bijekcije između elemenata dva skupa definiše jednu relaciju ekvivalencije: dva skupa su u toj relaciji ako i samo ako postoji neko bijektivno preslikavanje jednog skupa na drugi. Kao što je poznato, relacijom ekvivalencije definišu se disjunktne klase ekvivalencije. Dva skupa, prema tome, imaju isti kardinalni broj ako i samo ako pripadaju istoj klasi ekvivalencije u odnosu na opisanu relaciju.

Oznaka za kardinalni broj prebrojivih skupova je $\aleph_0$ (čita se *alef nula*). Ako je S prebrojiv skup, pišemo $\text{card } S = \aleph_0$. Prebrojivi su:

- ✓ Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$;
- ✓ Skup celih brojeva $\mathbb{Z}$;
- ✓ Skup svih parnih brojeva;
- ✓ Skup svih neparnih brojeva.
- ✓ Skup svih prostih brojeva.

Razmotrimo sada skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva. Racionalni su oni brojevi koji se mogu predstaviti kao količnik dva cela broja: $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Posmatrajmo sledeću tabelu:

$\frac{1}{1}$	$\nearrow$	$\frac{2}{1}$	$\longrightarrow$	$\frac{3}{1}$	$\nearrow$	$\frac{4}{1}$	$\longrightarrow$	$\frac{5}{1}$...
$\downarrow$		$\frac{1}{2}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nwarrow$	$\frac{4}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{3}$	$\nwarrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$...
$\downarrow$		$\frac{1}{4}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nwarrow$	$\frac{4}{4}$...
$\frac{1}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{2}{5}$	$\nwarrow$	$\frac{3}{5}$	$\nearrow$	$\frac{4}{5}$	$\nwarrow$	$\frac{5}{5}$...
...		...		...		...		...

U prvoj vrsti su svi pozitivni racionalni brojevi koji u imeniocu imaju 1, u drugoj oni koji u imeniocu imaju 2, itd. Dakle, svi pozitivni racionalni brojevi su upisani u tabelu. Ako tabelu obilazimo putem koji je označen strelicama, obići ćemo sve brojeve. Na ovom putu možemo da preskočimo brojeve koji se ponavljaju; na primer, 1 se pojavljuje kao $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, ... Na taj način je uspostavljena bijekcija između skupa pozitivnih racionalnih brojeva i skupa prirodnih brojeva: Prvom racionalnom broju na označenom putu dodeljujemo broj 1, drugom broj 2, itd ... Dakle, skup

pozitivnih racionalnih brojeva može se predstaviti u obliku niza $r_1, r_2, \dots$, pa je prebrojiv. Skup svih racionalnih brojeva može se, prema tome, predstaviti u obliku

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots,$$

pa je i ovaj skup prebrojiv. Dakle, dokazali smo:

✓ Skup racionalnih brojeva je prebrojiv

Kako stoje stvari sa skupom realnih brojeva? Ispostavlja se da

✓ Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije prebrojiv; njegov kardinalni broj je veći od $\aleph_0$;

✓ Bilo kakav interval (konačan ili beskonačan, otvoren ili zatvoren) ima isti kardinalni broj kao skup $\mathbb{R}$.

Dokazi ovih tvrđenja dati su u zadacima 105 i 106.

Kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ označava se sa c (kao početno slovo latinskog prideva *continuo*, neprekidan). Osim kardinalnih brojeva $\aleph_0$ i c , postoje i veći kardinalni brojevi.

◇◇ strana 73, zadaci 102-107

2.2. Realni nizovi

2.2.1. Definicija niza i osnovni pojmovi

Govoreći o prebrojivim skupovima, pomenuli smo da se njihovi elementi mogu urediti u niz. Tako dobijamo

- skup prirodnih brojeva $\rightarrow$ niz (svih) prirodnih brojeva
- skup racionalnih brojeva $\rightarrow$ niz (svih) racionalnih brojeva
- skup celih brojeva $\rightarrow$ niz (svih) celih brojeva
- skup parnih brojeva $\rightarrow$ niz (svih) parnih brojeva
- ...

Razlika između skupa S i niza njegovih elemenata je u tome da je u nizu definisan poredak, tj. zna se koji je prvi, drugi, treći ... član niza, dok u skupu poredak nije definisan. Na taj način, nizom se uspostavlja jedno preslikavanje između skupa prirodnih brojeva i elemenata skupa S . Prema tome, niz je funkcija čiji je domen skup prirodnih brojeva.

Definicija 2.2. *Svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup $\mathbb{R}$ nazivamo **realnim nizom**. Broj koji se ovim preslikavanjem dodeljuje prirodnom broju n označava se sa x_n , a_n , itd i zove se ***n-ti član niza*** ili ***n-ti element niza***; prirodan broj n je ***indeks*** člana x_n . Realan broj x_n naziva se ***opštim članom niza***. Za niz $\{x_n\}$ čiji su članovi $x_1, \dots, x_n, \dots$ koristi se oznaka $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ili samo $\{x_n\}$. U domen ovog preslikavanja ponekad se uključuje i nula, pa se posmatra niz $x_0, x_1, \dots$*

Na sličan način mogu se definisati i nizovi kompleksnih brojeva, nizovi funkcija ili, uopšte, nizovi elemenata proizvoljnog skupa. U ovom odeljku posmatramo samo realne nizove.

Primer 8. Niz može biti zadat pomoću formule, u eksplicitnom obliku. Na primer:

- Formulom $x_n = 2n - 1$ definisan je niz neparnih brojeva čiji su članovi $1, 3, 5, \dots$. Oni se dobijaju kada se u formulu za x_n stavi da je, redom, $n = 1, n = 2, n = 3, \dots$
- Formulom $x_n = 5n + 3$ definisan je niz čiji su članovi $8, 13, 18, 23, \dots$. To su prirodni brojevi koji daju ostatak 3 pri deljenju sa 5.
- Formulom $x_n = (-1)^n$ definisan je jedan važan niz koga ćemo često koristiti. To je niz $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$. Sličnom formulom, $x_n = (-1)^{n-1}$, definisan je niz koji počinje sa 1: $1, -1, 1, -1, \dots$
- Formulom $x_n = \cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ definisan je niz čiji su članovi, redom,

$$\cos \alpha, -\sin \alpha, -\cos \alpha, \sin \alpha, \cos \alpha, \dots$$

Primetimo da u ovom slučaju niz počinje od člana sa indeksom 0.

Niz može biti zadat i pomoću **rekurentne formule**. Na taj način se svaki sledeći član niza izračunava pomoću jednog ili više prethodnih članova. Na primer:

- Ako zadamo da je

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n^2 + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dobijamo niz $0, 1, 2, 5, 26, \dots$

- Rekurentnom formulom

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

određen je niz čiji su članovi

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Ovaj niz se zove FIBONACCIjev niz.

Rekurentne formule se jednostavno programiraju. Na primer, sledeći algoritam generiše prvih 100 članova niza čiji su članovi zadati rekurentnom formulom $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ i smešta ih u vektor x

$$(1) \quad n = 1, \quad y := 0, \quad x(n) := 0$$

$$(2) \quad n := n + 1, \quad y := y^2 + 1, \quad x(n) := y$$

$$(3) \quad \text{Ako je } n < 100 \text{ povratak na (2);}$$

$$(4) \quad \text{kraj}$$

Niz može biti zadat i opisno, bez formule. Na primer,

- **Niz decimalnih cifara broja π , u redosledu pojavljivanja.** Nije moguće naći formulu za članove ovog niza, ali se oni mogu izračunati numeričkim metodama (zadaci 779 i 780).
- **Niz prostih prirodnih brojeva.** Za ovaj niz nije nađena formula koja bi za dato n dala n -ti po redu prost broj. Međutim, za svaki dati broj, može se, sa više ili manje teškoće, odrediti da li jeste ili nije prost. Prvih nekoliko prostih brojeva su:

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Zna se da ih ima beskonačno mnogo, a do sada¹ najveći nađen prost broj ima 7816230 cifara.

- **Niz racionalnih brojeva.** Kao što smo dokazali na strani 45, racionalni brojevi se mogu urediti u niz. Postoji beskonačno mnogo načina da se to uradi.

U matematičkoj analizi proučava se ponašanje članova niza kada njihov indeks neograničeno raste („teži ka beskonačnosti”). Ova, naizgled jednostavna problematika je fundamentalna za proučavanje osobina realnih i kompleksnih brojeva, skupova i funkcija, a ima i veliki broj neposrednih primena.

Ideja je da se proučava „gomilanje” članova niza oko neke vrednosti. Na primer, članovi nizova $\{\frac{1}{n}\}$ ili $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ „gomilaju se” oko nule, odnosno, koliko god mali interval oko nule uzeli, svi članovi niza počevši od nekog indeksa nalaziće se u tom intervalu. To je motivacija za sledeću striktnu definiciju.

Definicija 2.3. Kažemo da je realan broj a **granična vrednost ili limes** niza $\{x_n\}$ i pišemo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ ili $x_n \rightarrow a$ ako

$$(5) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Često ćemo umesto $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ pisati samo $\lim x_n$. Ako je $\lim x_n = a$, kažemo da niz $\{x_n\}$ **konvergira ka** a ili da **teži ka** a kad n teži ka beskonačnosti.

Ako postoji neko $a \in \mathbb{R}$ takvo da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, kažemo da je niz **konvergentan**.

Videćemo kasnije da je moguće utvrditi da je niz konvergentan, a da pri tome ne znamo njegovu graničnu vrednost. Za sada, jedini način da odredimo graničnu vrednost niza je da pretpostavimo (izračunavanjem prvih nekoliko članova ili na drugi način) da je $\lim x_n = a$, za neko konkretno a , a zatim da to i dokažemo proveravajući uslov iz definicije.

Primer 9. Ako je $x_n = \frac{1}{n}$, dokazaćemo da je $\lim x_n = 0$. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Nejednakost $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ekvivalentna je sa $n > 1/\varepsilon$, pa ako stavimo $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$, formalni uslov iz definicije 2.3 biće ispunjen: za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da za svako $n \geq n_0$ važi da je $|x_n - 0| < \varepsilon$.

¹25. decembar 2005.

Na sličan način dokazuje se da je i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$; u ovom slučaju, članovi niza su naizmenično sa desne i leve strane nule.

Niz $\frac{2+(-1)^n}{n}$ takođe konvergira ka nuli; razlika između ovog i dva prethodno navedena primera je u tome što ovaj niz ne konvergira ka nuli monotono, odnosno, nije tačno da je svaki sledeći član bliži nuli od prethodnog. $\square$

Postoji više ekvivalentnih oblika uslova (5). Na primer, očigledno je da je (5) ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Dalje, znak $\geq$ u (5) može se zameniti sa $>$, a znak $<$ sa $\leq$. Pored toga, umesto „ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ ” može se staviti „ $(\exists y_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq y_0)$ ”. Ova tvrđenja je jednostavno dokazati. Važno je znati da

!

pri dokazivanju konvergencije niza, uslov iz definicije 2.3 je dovoljno proveriti za

malo ε i **veliko** n

Primer 10. Neka je $x_n = 2^{1/n}$. Da bismo stekli predstavu o ponašanju ovog niza, izračunajmo prvih nekoliko članova:

$$2^1 = 2, \quad 2^{1/2} = 1.41, \quad 2^{1/3} = 1.26, \quad 2^{1/4} = 1.19, \quad \dots, \quad 2^{1/10} = 1.07, \dots$$

Odavde se može pretpostaviti da je $\lim x_n = 1$. Dokažimo to. Kako je $2^{1/n} > 1$ za svako n , imamo da je nejednakost $|2^{1/n} - 1| < \varepsilon$ ekvivalentna sa $2^{1/n} < 1 + \varepsilon$, odnosno, posle logaritmovanja, $n > \log 2 / \log(1 + \varepsilon)$. To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $y_0 = \log 2 / \log(1 + \varepsilon)$ takvo da je za $n > y_0$ ispunjena nejednakost $|x_n - 1| < \varepsilon$, pa je $\lim x_n = 1$.

Na isti način se pokazuje da je $\lim a^{1/n} = 1$ za svako $a > 0$. $\square$

Definicija 2.3 postaje jasnija ako se uvedu dva nova pojma.

Definicija 2.4. *Otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbb{R}$ nazivamo ε -**okolinom** tačke a . Pod pojmom **okolina** tačke a podrazumevamo svaki otvoreni interval koji sadrži tačku a .*

Definicija 2.5. *Kažemo da **skoro svi članovi niza** imaju neku osobinu P ako postoji n_0 tako da svako x_n za $n \geq n_0$ ima osobinu P .*

Drugim rečima, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počevši od nekog indeksa, ili, što je isto, ako tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Uvedeni termin ćemo koristiti i u kontekstu kao što je „skoro svi prirodni brojevi”, „skoro svaki indeks niza” i sl.

Nejednakost $|x_n - a| < \varepsilon$ ekvivalentna je sa $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pa se definicija 2.3 može iskazati i na sledeći način.

Definicija 2.6. Ekvivalentna definicija konvergencije niza. Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Kako svaka okolina (tj. otvoreni interval koji sadrži tačku a) sadrži neku ε -okolinu i obrnuto, svaka ε -okolina je okolina, zaključujemo, polazeći od definicije 2.6, da je niz konvergentan ako i samo ako se u svakoj ε -okolini nalaze skoro svi članovi niza.

Nije teško videti da ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ imaju neku osobinu, onda tu osobinu imaju i skoro svi članovi niza $\{x_{n+k}\}$, za fiksirano k . Prema tome, za fiksirano k , nizovi

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad \text{i} \quad x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots$$

su ekvivalentni sa gledišta konvergencije, tj. ako jedan od njih konvergira ka nekom broju a , to isto važi i za drugi niz. Dakle, ako je iz nekog razloga to lakše, konvergenciju niza možemo ustanoviti za niz $\{x_{n+5}\}$ ili $\{x_{n+100}\}$ i sl., a zatim na osnovu toga zaključiti da i niz $\{x_n\}$ konvergira.

Ako se skoro svi članovi niza nalaze u nekoj ε_0 -okolini tačke a , onda to isto važi i za svaku ε -okolinu, za $\varepsilon > \varepsilon_0$. Iz ovoga zaključujemo da je uslov definicije 2.3 ili ekvivalentne definicije 2.6 dovoljno proveriti za malo ε , odnosno za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, gde je ε_0 proizvoljan pozitivan broj.

Primer 11. Niz $\{(-1)^n\}$ nije konvergentan. Zaista, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neko $a \in \mathbb{R}$ takvo da je $\lim(-1)^n = a$. Kako su svi članovi datog niza jednaki ili -1 ili 1 , to znači da se oba ova broja nalaze u proizvoljnoj ε -okolini broja a . To nije moguće za $\varepsilon < 1/2$, jer brojevi -1 i 1 ne mogu pripadati istom intervalu dužine manje od 1 . Dakle, pretpostavka nije tačna i niz nije konvergentan. $\square$

Teorema 2.1. Niz $\{x_n\}$ konvergira ka a ako i samo ako

$$(6) \quad (\exists C \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon.$$

Dokaz. Ako je $\lim x_n = a$, tada se (6) (sa $C = 1$) dobija iz definicije 2.3.

Obrnuto, ako važi (6) onda se za svako $\varepsilon > 0$ skoro svi članovi niza nalaze u $C\varepsilon$ -okolini broja a ; zbog toga što je ε proizvoljno, ovo je ekvivalentno sa tvrdjenjem da se u svakoj okolini broja a nalaze skoro svi članovi niza, pa on, prema definiciji 2.6, konvergira ka a . $\square$

Teoremu 2.1 ćemo veoma često primenjivati, uglavnom u situacijama kada je lakše pokazati da je, na primer, $|x_n - a| < 2\varepsilon$ nego da je $|x_n - a| < \varepsilon$. Naglasimo da broj C koji se pojavljuje u (6) ne sme da zavisi od ε .

$\diamond$ strana 74, zadaci 108-126

2.2.2. Osobine konvergentnih nizova

Prva osobina koju ćemo dokazati je jedinstvenost granične vrednosti. Ustvari, striktno govoreći, samo u tom slučaju imamo pravo da pišemo $\lim x_n = a$.

Teorema 2.2. *Niz ne može imati više od jedne granične vrednosti.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim x_n = a$ i $\lim x_n = b$. Ako je $a \neq b$, onda postoji neko $\varepsilon > 0$ takvo da ε -okoline brojeva a i b nemaju zajedničkih elemenata (može se uzeti $\varepsilon = |a - b|/2$, na primer). Iz definicije sleduje da se svi članovi niza $\{x_n\}$ sa indeksom većim od nekog n_1 nalaze u ε -okolini broja a . Isto tako, svi članovi niza sa indeksom većim od nekog n_2 nalaze se u ε -okolini broja b . To znači da se svi članovi niza sa indeksom koji je veći i od n_1 i od n_2 nalaze u obe okoline, što je nemoguće, jer smo ε izabrali tako da one nemaju zajedničkih elemenata. Prema tome, nemoguće je da je $a \neq b$. $\square$

- Metod dokaza koji smo ovde primenili zove se **deductio ad absurdum**-izvođenje iz protivrečnosti. U takvom dokazu pretpostavi se da važi suprotno tvrđenje od onog koje se dokazuje, pa se onda pokaže da je to nemoguće, jer se dobija protivrečnost. Ovaj tip dokaza smo primenili i u primeru 11.

Za niz $\{x_n\}$ kažemo da je **ograničen niz** ako je skup svih elemenata tog niza ograničen, tj. ako postoji neki realan broj $M \geq 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$, na primer $\varepsilon = 1$. Počevši od nekog indeksa n_0 , svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju intervalu $(a - 1, a + 1)$. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od preostalih elemenata niza. Definišimo

$$m = \min(a - 1, m_1), \quad M = \max(a + 1, M_1).$$

Sada je očigledno da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $m \leq x_n \leq M$, iz čega sleduje da je niz ograničen. $\square$

- Ovde smo upotrebili tzv. **direktan dokaz**: Tvrđenje se dokazuje polazeći od datih pretpostavki, u nizu logički povezanih koraka.

Ograničenost niza je, prema teoremi 2.3, potreban uslov konvergenције. To nije i dovoljan uslov; na primer, niz $\{(-1)^n\}$ je ograničen ali nije konvergentan.

Sledeća teorema pokazuje da se sa limesom može proći kroz osnovne operacije. Dokaz ove teoreme je veoma instruktivan, jer ilustruje primenu nejednakosti trougla, što je osnovna ideja i u dokazivanju mnogih drugih teorema. Ideja se sastoji u sledećem: Ako znamo da je $|a - b| < \varepsilon$ i da je $|b - c| < \varepsilon$, tada iz

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

zaključujemo da je $|a - c| < 2\varepsilon$.

Teorema 2.4. (i) Ako je $x_n = c \in \mathbb{R}$ za skoro svako n , tada je $\lim x_n = c$.
(ii) Neka je $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) i neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Tada važi:

$$\lim (ax_n + by_n) = ax + by, \quad \lim (x_n + c) = x + c,$$

$$\lim x_n y_n = xy; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \text{ ako } y \neq 0 \text{ i } y_n \neq 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. • Tvđenje (i) je posledica činjenice da se broj c nalazi u svakoj svojoj okolini.
• Dokažimo prvo tvrđenje u (ii). Neka je $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$. Fiksirajmo proizvoljno $\varepsilon > 0$. Počevši od nekog indeksa, nazovimo ga n_1 , svi članovi niza $\{x_n\}$ nalaze se u ε -okolini broja x . Isto tako, počevši od nekog indeksa n_2 , svi članovi niza $\{y_n\}$ nalaze se u ε -okolini broja y . Neka je $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Tada su, za svako $n \geq n_0$ ispunjene obe nejednakosti

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |y_n - y| < \varepsilon,$$

pa iz nejednakosti trougla sleduje da je, za $n \geq n_0$

$$|ax_n + by_n - (ax + by)| = |(ax_n - ax) + (by_n - by)| \leq |a| \cdot |x_n - x| + |b| \cdot |y_n - y| \leq (|a| + |b|)\varepsilon.$$

Primenom teoreme 2.1, zaključujemo da je $\lim (ax_n + by_n) = ax + by$.

• Drugo tvrđenje u (ii) je posledica dokazanog, jer ako stavimo da je $y_n = c$ za svako n , tada na osnovu (i) imamo da je $\lim y_n = c$, pa je $\lim (x_n + c) = x + c$.

• Dokažimo sada treće tvrđenje u (ii). Neka je $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$. Fiksirajmo proizvoljno $\varepsilon > 0$.

Primenom nejednakosti trougla imamo da je

$$(7) \quad |x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy_n + xy_n - xy| \leq |y_n| \cdot |x_n - x| + |x| \cdot |y_n - y|.$$

Prema teoremi 2.3, postoji realan broj $M > 0$ takav da je $|y_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dalje, isto kao u dokazu prvog tvrđenja u (ii), postoji n_0 takvo da za $n \geq n_0$ važe nejednakosti $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$. Sada, na osnovu (7), zaključujemo da za svako $n \geq n_0$ važi nejednakost

$$|x_n y_n - xy| \leq (M + |x|)\varepsilon$$

i tvrđenje je dokazano.

• Na kraju, za četvrto tvrđenje u (ii) dovoljno je dokazati da je $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$ i onda primeniti već dokazano pravilo za proizvod. Videti zadatak 125 za kompletan dokaz.

Iz dokazane teoreme jednostavno se može ponovo dobiti teorema 2.2 o jedinstvenosti granične vrednosti. Naime, ako pretpostavimo da je $\lim x_n = a$ i $\lim x_n = b$, imamo da je $0 = \lim 0 = \lim (x_n - x_n) = a - b$, pa je $a = b$.

Posebnu ulogu među konvergentnim nizovima imaju nizovi koji konvergiraju ka nuli – tzv. **nula-nizovi**. Zapravo, proučavanje konvergentnih nizova može se svesti na proučavanje samo nula-nizova, jer važi

Teorema 2.5. Niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}$ ako i samo ako niz $\{x_n - a\}$ konvergira ka nuli.

Dokaz. Neka je $\lim x_n = a$. Na osnovu teoreme 2.4 imamo da je $\lim (x_n - a) = \lim x_n - a = 0$. Obrnuto, neka je $\lim (x_n - a) = 0$. Tada je $\lim (x_n - a + a) = \lim (x_n - a) + a = a$, pa niz $\{x_n\}$ konvergira ka a . $\square$

Ako se nula-niz pomnoži ograničenim nizom, dobijeni niz je ponovo nula-niz. To tvrdi sledeća teorema.

Teorema 2.6. *Neka je $\{x_n\}$ nula-niz i neka je $\{y_n\}$ proizvoljan ograničen niz (koji ne mora biti konvergentan). Definišimo $z_n = x_n y_n$, $n = 1, 2, \dots$. Tada je $\{z_n\}$ nula-niz.*

Dokaz. Kako je $\{y_n\}$ ograničen niz, postoji realan broj $M > 0$ takav da je $|y_n| < M$ za svako n . Iz konvergencije niza $\{x_n\}$ ka nuli sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da za $n \geq n_0$ važi nejednakost $|x_n| < \varepsilon$. Prema tome, za $n \geq n_0$ imamo da je $|z_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M\varepsilon$ i niz $\{z_n\}$ konvergira ka nuli na osnovu teoreme 2.1.

Primer 12. Neka je $z_n = \frac{\sin n}{n}$. Kako je $\{\sin n\}$ ograničen niz, a $\frac{1}{n}$ nula-niz, primenom teoreme 2.6 zaključujemo da je $\lim z_n = 0$. $\square$

Sledeća teorema odnosi se na prolaz limesom kroz relaciju poretka.

Teorema 2.7. (i) *Ako je $\lim x_n = a > p$ ($< p$), tada je $x_n > p$ ($< p$) za skoro svako n .*

(ii) *Ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan i ako je $x_n \geq p$ ($\leq p$) za skoro svako n , onda je $\lim x_n \geq p$ ($\leq p$).*

Dokaz. • (i) Neka je $\lim x_n = a$ i neka je $a > p$. Uzmimo da je $\varepsilon = (a - p)/2$. Svi brojevi koji se nalaze u ε -okolini broja a su veći od p , a skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ se nalaze u ovoj okolini. Ovim je tvrđenje dokazano. Drugi deo (za slučaj $a < p$) dokazuje se analogno.

• (ii) Neka je $\lim x_n = a$ i neka je $x_n \geq p$ za skoro svako n . Ako bi bilo $a < p$, tada bi iz dokazanog pod (i) imali da je $x_n < p$ za skoro svako n , a to je kontradikcija sa pretpostavkom da je $x_n \geq p$ za skoro svako n . Dakle, mora biti $a \geq p$, što je i trebalo dokazati. Ako je $x_n \leq p$, dokaz je analogan. $\square$

• U delu (i), primenili smo direktan dokaz. Metod primenjen u dokazu pod (ii), zove se **dokaz kontrapozicijom**. Ova vrsta dokaza se koristi kada treba dokazati tvrđenje oblika $A \implies B$ i sastoji se u tome da se pokaže da je nemoguće da važi A i ne- B . Dokaz kontrapozicijom je sličan metodi *deductio ad absurdum*.

Važno: Iz $x_n > p$ ne može se zaključiti da je $\lim x_n > p$, već samo da je $\geq p$. Na primer, iako je $1/n > 0$ za svako n , ipak je $\lim x_n = 0$.

Teorema 2.8. *Ako svi članovi konvergentnog niza $\{x_n\}$ pripadaju segmentu $[a, b]$, tada i $\lim x_n \in [a, b]$.*

Dokaz. Neka je $\lim x_n = x$ i neka $x_n \in [a, b]$ za skoro svako n . To znači da za skoro svako n važi da je $x_n \geq a$ i $x_n \leq b$; na osnovu teoreme 2.7 zaključujemo da je $x \geq a$ i $x \leq b$, odnosno $x \in [a, b]$.

◇◇ strana 76, zadaci 127-138

2.2.3. Beskonačne granične vrednosti

Posmatrajmo nizove $x_n = n^2$, $y_n = n + \sin n$, $z_n = (-1)^n n + n + \frac{1}{n}$. Sva tri niza su neograničena, prema tome, nijedan od njih nije konvergentan. Međutim, dok treći niz sadrži i velike (sa parnim indeksom) i male članove (sa neparnim), prva dva niza imaju osobinu da je samo konačno mnogo njihovih članova manje od svakog, bilo kako velikog broja.

Definicija 2.7. Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K , tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

Definicija 2.7 postaje analogna definiciji 2.6, ako se uvede pojam **okoline beskonačnosti**. Pod okolinom tačke $+\infty$ podrazumevamo interval $(K, +\infty)$, a okolina tačke $-\infty$ je interval $(-\infty, -K)$, za proizvoljno $K \in \mathbb{R}$.

Sada možemo reći da niz konvergira ka $+\infty$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke $+\infty$ nalaze skoro svi članovi niza.

Očigledno je $\lim x_n = -\infty$ ako i samo ako je $\lim (-x_n) = +\infty$.

Svaki realni niz spada u jednu od tri kategorije:

- Konvergira ka nekom realnom broju a (konvergentan niz),
- Konvergira ka $\pm\infty$ (određeno divergentan niz),
- Nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrednost (neodređeno divergentan niz).

Primer 13. Za koje vrednosti $q \in \mathbb{R}$ je konvergentan **geometrijski niz** $\{q^n\}$?

Rešenje. • Ako je $q = 1$, svi članovi datog niza su jednaki 1, pa je i $\lim q^n = 1$.
 • Za $q = -1$ imamo niz $(-1)^n$ za koji znamo da nema graničnu vrednost.
 • Za $|q| < 1$, niz teži nuli, što je jasno ako se posmatra niz za, na primer, $q = 1/2$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Da bismo to i dokazali, uočimo da je

$$|q^n| < \varepsilon \iff |q|^n < \varepsilon \iff n \log |q| < \log \varepsilon \iff n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|},$$

gde je u poslednjoj nejednakosti promenjen smer zbog $\log |q| < 0$. Prema tome, ako je $n > \log \varepsilon / \log q$ onda je $|q|^n < \varepsilon$, pa je $\lim |q|^n = 0$.

• Ako je $q > 1$ dati niz bekonačno raste. Nejednakost $q^n > K$ ekvivalentna je sa $n > \log K / \log q$, pa je $\lim q^n = +\infty$.

• Za $q < -1$, članovi niza sa parnim indeksom su pozitivni, a sa neparnim indeksom su negativni, a svi članovi po apsolutnoj vrednosti beskonačno rastu. Prema tome, niz u ovom slučaju nema graničnu vrednost.

• Iz navedenog proizilazi da je niz konvergentan za $q \in (-1, 1]$. $\square$

Sledeća teorema se lako dokazuje, ali je važna zbog primena.

Teorema 2.9. *Ako je $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$ i $\lim y_n = +\infty$, tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \quad (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ i ako je $x_n > 0$ za svako n , tada je $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Skraćeno i simbolički, pišemo:

$$x + \infty = +\infty; \quad x \cdot (+\infty) = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \quad (x \neq 0); \quad \frac{x}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0_+} = +\infty.$$

Primer 14. Kada kažemo da je $\frac{1}{0_+} = +\infty$, to znači da je izraz u imeniocu pozitivan i da teži nuli. Ako imamo beskonačno mnogo i pozitivnih i negativnih članova u imeniocu, razlomak neće imati graničnu vrednost. Na primer, niz

$$x_n = \frac{1}{\log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

je neodređeno divergentan, jer su članovi sa parnim indeksom pozitivni, a oni sa neparnim indeksom negativni.

Primer 14. Ako se izračunaju vrednosti x_n za veliko n , može se uočiti da je $|x_n| \approx n$. Ova osobina je u vezi sa definicijom broja e (osnovom logaritma), i biće dokazana u zadatku 209. $\square$

U nekim slučajevima kombinacije dva niza, rezultat se ne može unapred odrediti kao u slučajevima opisanim u teoremi 2.9. Tada kažemo da je granična vrednost **neodređena** ili **neodređenog tipa**. To ne znači da ova granična vrednost ne postoji, već samo da se ne može unapred odrediti primenom pravila poput onih koja su navedena u teoremi 2.9.

Na primer, ako je $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, niz $\{x_n/y_n\}$ može biti konvergentan ili divergentan. Ovo je tzv. neodređenost **tipa** ∞/∞ . U svakom konkretnom slučaju, primenom nekih transformacija, određujemo graničnu vrednost datog izraza.

Primer 15. Izraz $x_n = \frac{3n^2 + 2n + 5}{2n^2 - n + 1}$ je neodređenost tipa ∞/∞ , jer i brojilac i imenilac konvergiraju ka $+\infty$. Deljenjem brojioca i imenioca sa n^2 dobijamo da je

$$x_n = \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Odavde, primenom pravila navedenih u teoremi 2.4 na strani 52, nalazimo da je $\lim x_n = 3/2$. $\square$

Postoji sedam tipova neodređenosti.

Neodređeni su izrazi tipa

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0.$$

Rešavanje limesa neodređenog tipa je veoma značajno. Ustvari, jedino ovakvi limesi zahtevaju neki poseban postupak; određeni tipovi se lako rešavaju primenom navedenih pravila. U sledećem odeljku dajemo dve teoreme koje se primenjuju za određivanje graničnih vrednosti neodređenog tipa.

2.2.4. Dve teoreme o nizovima

Teorema 2.10. Teorema o dva žandara. Neka su $\{y_n\}$ i $\{z_n\}$ nizovi za koje je $\lim y_n = \lim z_n = c$, gde je $c \in \mathbb{R}$. Ako za skoro svako n važe nejednakosti

$$y_n \leq x_n \leq z_n,$$

tada i niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost i važi da je $\lim x_n = c$.

Dokaz. Neka je $\lim y_n = \lim z_n = c$. Pretpostavimo najpre da je $c \in \mathbb{R}$. Tada za fiksirano $\varepsilon > 0$ postoji n_1 takvo da se svi članovi niza $\{y_n\}$ za $n \geq n_1$ nalaze u ε -okolini broja c i postoji n_2 takvo da se svi članovi niza $\{z_n\}$ nalaze u istoj okolini. Dakle, za n veće i od n_1 i od n_2 (formalno, za $n \geq \max(n_1, n_2)$), članovi oba niza pripadaju intervalu $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Počevši od nekog n_3 važi da je $y_n \leq x_n \leq z_n$; dakle, za $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ imamo da je

$$c - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < c + \varepsilon,$$

pa se, prema tome, svi članovi niza $\{x_n\}$ sa $n \geq n_0$ nalaze u ε -okolini broja c , što znači da je $\lim x_n = c$.

Ako je $c = +\infty$, potrebna nam je samo nejednakost $y_n \leq x_n$. Zaista, zbog $\lim y_n = +\infty$, za svako $K > 0$ postoji n_1 takvo da je $y_n > K$ za $n \geq n_1$. Ako je $x_n \geq y_n$ za $n \geq n_2$, onda za $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ važi da je $x_n \geq y_n > K$, odakle izlazi da je $\lim x_n = +\infty$. Slučaj $c = -\infty$ dokazuje se analogno. $\square$

Teorema 2.10 je samo uvod u razne metode poređenja veličina koje teže istoj graničnoj vrednosti, koje ćemo kasnije detaljno obrađivati. Ona se često primenjuje sa $y_n = c$ ili $z_n = c$ za svako n .

Svoj popularni naziv ova teorema je dobila po tome što nizovi $\{y_n\}$ i $\{z_n\}$ „sprovode” niz $\{x_n\}$ ka graničnoj vrednosti c .

Primer 16. Neka je $x_n = \frac{\log(1+n)}{1+n^2}$. Dokazati da je $\lim x_n = 0$.

Rešenje. Matematičkom indukcijom se bez teškoća dokazuje da je $\log(1+n) < n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ (u stvari, važi i opštija nejednakost, $\log(1+x) < x$ za svako $x > 0$). Odavde je

$$0 \leq \frac{\log(1+n)}{1+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Kako je $\lim 1/n = 0$, zaključujemo, prema teoremi 2.10, da je i $\lim x_n = 0$.

Primer 17. Naći $\lim \sqrt[n]{5^n + 7^n}$.

Rešenje. Očigledno je

$$7^n \leq 5^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n, \quad \text{odakle je} \quad 7 \leq \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leq 2^{1/n} \cdot 7.$$

Kako je $\lim 2^{1/n} = 1$ (videti zadatak 174), imamo da je $\lim \sqrt[n]{5^n + 7^n} = 7$.

Teorema 2.11. Stolzova teorema. Neka su ispunjeni uslovi:

- $\lim y_n = +\infty$,
- niz $\{y_n\}$ je monotono rastući, tj. $y_{n+1} > y_n$ za skoro svako n ,
- postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, gde je $\{x_n\}$ proizvoljan niz.

Tada postoji i $\lim x_n/y_n$ i važi jednakost

$$\checkmark \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

STOLZova teorema koristi se u slučajevima neodređenosti tipa ∞/∞ . Često je lakše naći $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n)$ nego $\lim x_n/y_n$. Čitalac koji ima neka prethodna znanja primetiće da je STOLZova teorema analogna L'HOSPITALovom pravilu, koje se takođe veoma mnogo primenjuje za rešavanje limesa količnika funkcija (strana 161). Dokaz ove teoreme izostavljamo zbog njene složenosti.

Primer 18. Naći $\lim n/2^n$.

Rešenje. Kako niz $\{2^n\}$ monotono teži ka $+\infty$, i kako je

$$\lim \frac{n+1-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0,$$

uslovi za primenu STOLZove teoreme su ispunjeni, pa je i $\lim n/2^n = 0$.

◇◇ strana 77, zadaci 139-186

2.2.5. Monotoni nizovi

Kaže se da je niz $\{x_n\}$ **monotono rastući** ako je svaki sledeći član veći od prethodnog, tj. $x_{n+1} > x_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako koristimo ovu osobinu pri

utvrđivanju konvergencije niza, dovoljno je da je $x_{n+1} > x_n$ za **skoro svako** n . Niz može biti još i

- **monotono neopadajući:** $x_{n+1} \geq x_n$;
- **monotono opadajući:** $x_{n+1} < x_n$;
- **monotono nerastući:** $x_{n+1} \leq x_n$.

U sledećoj teoremi pojavljuju se pojmovi supremuma i infimuma niza. Pod **supremumom niza** podrazumevamo supremum skupa elemenata tog niza:

$$\sup x_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Infimum niza, $\inf x_n$ definiše se analogno, $\inf x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 2.12. *Svaki monotoni niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*

- ✓ *Monotoni i ograničeni niz je konvergentan; pri tome je $\lim x_n = \sup x_n$ za neopadajući niz i $\lim x_n = \inf x_n$ za nerastući.*
- ✓ *Ako je niz $\{x_n\}$ monotoni i neograničeni, tada je njegova granična vrednost jednaka $+\infty$ ili $-\infty$.*

Dokaz. • U dokazu možemo, bez smanjenja opštosti, pretpostaviti da je niz monotoni počevši od $n = 1$.

• **Monotoni i ograničeni niz:** Pretpostavimo da je niz $\{x_n\}$ monotono neopadajući i ograničeni odozgo. Neka je $\sup x_n = c \in \mathbb{R}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 , takvo da je $x_{n_0} > c - \varepsilon$. Kako je $\{x_n\}$ neopadajući niz, nejednakost $x_n > c - \varepsilon$ važi i za svako $n \geq n_0$. S druge strane, kako je $c = \sup x_n$, imamo da je $x_n < c$ za svako n . Odatle zaključujemo da za $n \geq n_0$ važe nejednakosti $-\varepsilon < x_n - c < 0$, tj. $|x_n - c| < \varepsilon$, pa je $\lim x_n = c$. Drugi deo tvrđenja (za monotono nerastući niz) dokazuje se analogno.

• **Monotoni i neograničeni niz:** Posmatrajmo sada niz $\{x_n\}$ koji je monotono neopadajući i neograničeni odozgo. U ovom slučaju je $\sup x_n = +\infty$, pa treba dokazati da je i $\lim x_n = +\infty$. Iz neograničenosti sleduje da za svako $K > 0$ postoji neko n_0 takvo da je $x_{n_0} > K$, a onda iz pretpostavke da je niz monotono neopadajući izlazi da je $x_n > K$ za svako $n \geq n_0$. Prema tome, za svako $K > 0$ postoji n_0 takvo da je $x_n > K$ za $n \geq n_0$, što znači da je $\lim x_n = +\infty$. U slučaju kada je $\{x_n\}$ monotono nerastući i neograničeni, na sličan način se pokazuje da je $\lim x_n = -\infty$.

Iz dokazane teoreme proizilazi postupak za nalaženje granične vrednosti monotoni i ograničenog niza $\{x_n\}$, koji ćemo prikazati na jednom primeru.

Primer 19. Niz $\{x_n\}$ definisan je rekurentnom formulom

$$(8) \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Iz ove formule možemo naći nekoliko prvih članova niza:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{5}, \quad x_3 = \frac{40}{41}, \quad \dots$$

Oдавде je prirodno pretpostaviti da su svi članovi niza u intervalu $(0, 1)$. To sada nije teško i dokazati: $x_n > 0$ je očigledno tačno (trivijalan dokaz matematičkom indukcijom), dok iz $x_1 < 1$ i

$$x_{n+1} < 1 \iff \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} < 1 \iff 5x_n + 4 < 4x_n + 5 \iff x_n < 1 \quad (n \geq 1)$$

zaključujemo, primenom matematičke indukcije, da je $x_n < 1$ za svako n . Dakle, niz $\{x_n\}$ je ograničen.

Prvih nekoliko članova ukazuju na to da niz verovatno raste. Dokaz je jednostavan, jer

$$x_{n+1} > x_n \iff \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} > x_n \iff x_n^2 < 1,$$

što je tačno na osnovu prethodnog.

Kako je dati niz ograničen i monotonno rastući, on je i konvergentan. Neka je $\lim x_n = c$. Ako u (8) pustimo da $n \rightarrow +\infty$, dobijamo da je

$$c = \frac{5c + 4}{4c + 5},$$

odakle je $c^2 = 1$. Kako je niz pozitivan, c ne može biti -1 , što znači da je $c = 1$.

Primedba. Za neke nizove koji su zadati rekurentnom formulom, moguće je dobiti formulu u eksplicitnom obliku, i tako naći limes. Niz u ovom primeru se takođe može dobiti u eksplicitnom obliku (videti zadatak 201). $\square$

Postupak naveden u primeru 19 može izgledati nepotrebno komplikovan. Zar nismo mogli bez prethodnog ispitivanja konvergenције da dokažemo da je $\lim x_n = 1$, puštajući da $n \rightarrow +\infty$ u jednakosti (8)? Nismo, kao što pokazuje sledeći jednostavan primer.

Primer 20. Neka je niz $\{x_n\}$ definisan sa

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 2 - x_n.$$

Nije teško pokazati da su članovi niza naizmenično 0 i 2, pa on nema graničnu vrednost. Ali ako bez provere pretpostavimo da ona postoji i da je jednaka c , iz definicione relacije nalazimo da je $c = 2 - c$, odnosno $c = 1$. $\square$

Naravno, niz ne mora biti monoton da bi bio konvergentan, tako da je izloženi postupak samo jedan od načina da se dokaže konvergenција niza.

Primer 21. Definicija broja e . Broj e , osnova tzv. „prirodnog logaritma“, jedan je od četiri najvažnija realna broja u matematici, pored brojeva 0, 1 i π . Izbor broja e nije stvar konvencije (kao što je, recimo, izbor broja 10 za bazu decimalnog sistema zapisivanja brojeva), već se on prirodno pojavljuje u matematici i njenim primenama.

Broj e se definiše kao granična vrednost (tipa 1^∞)

$$(9) \quad e \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

Broj e je iracionalan i transcendentan (nije koren ni jednog polinoma sa celim koeficijentima). Približna vrednost broja e je 2,71828..., ili, sa 540 decimala:

$e \approx 2,$	7182818284	5904523536	0287471352	6624977572	4709369995	9574966967
	6277240766	3035354759	4571382178	5251664274	2746639193	2003059921
	8174135966	2904357290	0334295260	5956307381	3232862794	3490763233
	8298807531	9525101901	1573834187	9307021540	8914993488	4167509244
	7614606680	8226480016	8477411853	7423454424	3710753907	7744992069
	5517027618	3860626133	1384583000	7520449338	2656029760	6737113200
	7093287091	2744374704	7230696977	2093101416	9283681902	5515108657
	4637721112	5238978442	5056953696	7707854499	6996794686	4454905987
	9316368892	3009879312	7736178215	4249992295	7635148220	8269895193

Granična vrednost niza u (9) postoji, jer je niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ monotono rastući i ograničen, kao što ćemo to sada pokazati.

- *Niz je monotono rastući:* Jednostavnim algebarskim transformacijama dobijamo da je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n .$$

Prema BERNOULLIjevoj nejednakosti (teorema 1.4 na strani 5), imamo da je, za

$$n \geq 2, \quad \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} .$$

Oдавde je, za $n \geq 2$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2} \right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1,$$

pa je niz $\{x_n\}$ monotono rastući.

- *Niz je ograničen:* Primenom binomnog razvoja dobijamo

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!n^n} .$$

Kako je, za $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \\ &< \frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2} < \frac{1}{2^{k-1}} , \end{aligned}$$

zaključujemo da je niz ograničen odozgo sa 3:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} < 3 .$$

Iz definicione jednakosti moguće je i približno izračunati broj e , ali je konvergencija spora, tako da se u praksi koriste drugi nizovi koji takođe konvergiraju ka broju e , ali brže (videti primer 88 na strani 180).