Nada Miličić **Miloš Miličić**

ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE

II deo

II izdanje

Akademska misao
Beograd, 2011

Dr Nada Miličić, redovni profesor
Dr Miloš Miličić, redovni profesor

ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE
II DEO
drugo izdanje

Recenzenti
Akademik dr Aleksandar Ivić, redovni profesor
Dr Milutin Obradović, redovni profesor

Izdavač
AKADEMSKA MISAO
Beograd

Štampa
Planeta print
Beograd

Tiraž
200 primeraka

ISBN 978-86-7466-417-9

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ova knjiga je napisana prema delu nastavnog programa predmeta *Matematika I* na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu i predstavlja drugi deo udžbenika za taj predmet i sa udžbenikom *Elementi više matematike, I deo*, autora M. Miličića čini jednu celinu. Kao i prvi deo udžbenika, i ovaj mogu koristiti i studenti svih drugih tehničkih, prirodno-matematičkih i ostalih fakulteta i viših škola.

Koncepcija knjige, kao i način izlaganja, podređeni su prvenstveno njenim korisnicima, tj. studentima I godine fakulteta i viših škola. U skladu s tim, a za što bolje osvetljavanje pojedinih pojmova i bolje razumevanje teorijskih izlaganja, dat je veliki broj grafičkih ilustracija, primera i rešenih zadataka. Verujemo da će takav način izlaganja materije u knjizi znatno doprineti njenom lakšem korišćenju i da može korisno poslužiti studentima u savladavanju matematičkog gradiva i pripremanju ispita.

Materija obrađena u knjizi podeljena je u deset poglavlja. Prvih šest i deveto poglavlje napisao je M. Miličić, dok je sedmo, osmo i deseto napisala N. Miličić.

Rukopis knjige u celini pročitali su, u svojstvu recenzenata, akademik dr Aleksandar Ivić, redovni profesor Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu i dr Milutin Obradović, redovni profesor Tehnološko-metalurškog fakulteta u Beogradu. Njihove sugestije i primedbe znatno su doprinele kvalittu knjige i autori su ih primili sa zahvalnošću.

Unapred zahvaljujemo svima koji nam ukažu na omaške, greške i nedostatke knjige.

Autori

Predgovor II izdanju

Ovo izdanje se razlikuje od prethodnog po tome što su ispravljene uočene greške i omaške i što je delimično izmenjeno VII i VIII poglavlje.

Autori

I POGLAVLJE

POLJE REALNIH BROJEVA

1. ISTORIJSKI PREGLED RAZVOJA POJMA REALNOG BROJA

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici je pojam realnog broja. Istorijski razvoj pojma realnog broja ide od prirodnih, preko celih i racionalnih do iracionalnih brojeva. Možemo smatrati da su prirodni brojevi: 1, 2, 3, 4, 5, ... nastali sa nastankom čoveka. Skup prirodnih brojeva se označava sa N, dakle, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. U skupu prirodnih brojeva definisane su dve binarne operacije: *sabiranje* i *množenje*, tj. ako su $m, n \in N$, tada je i $m + n \in N$ i $m \cdot n \in N$. Za sabiranje i množenje prirodnih brojeva važe zakoni asocijacije i komutacije, kao i zakon distribucije množenja u odnosu na sabiranje. Skup prirodnih brojeva je potpuno uređen po veličini relacijom $\leq$ (manje ili jednako): $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$ U tom uređenju, broj 1 je minimum skupa N, dok maksimum ne postoji. Svaki broj ima svog neposrednog *sledbenika*, a svaki broj, različit od 1, svog neposrednog *prethodnika*. Ako je n prirodni broj različit od 1, tada je $n - 1$ njegov neposredni prethodnik, a $n + 1$ njegov neposredni sledbenik. Za brojeve $n - 1$ i n, odnosno n i $n + 1$ kaže se da su *uzastopni* prirodni brojevi. Između dva prirodna broja n i $n + (k + 1)$, gde je $k \in N$, nalazi se k prirodnih brojeva.

Međutim, ako se zna zbir m dva prirodna broja i jedan od sabiraka, recimo n, tada nepoznati sabirak x možemo odrediti samo u slučaju kad je $m > n$. Drugim rečima, jednačina $x + n = m$ ima rešenje u skupu prirodnih brojeva samo u slučaju kad je $m > n$. Zahtev da jednačina $n + x = m$ ima rešenje za proizvoljne $m, n \in N$ dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva u skup celih brojeva. Broj nula dobijamo kao rešenje jednačine $x + 1 = 1$, ili bilo koje jednačine $x + n = n$ $(n \in N)$. Broj -1 dobijamo kao rešenje jednačina $x + 1 = 0$, ili bilo koje jednačine $x + (n + 1) = n$ $(n \in N)$. Uopšte, broj $-n$ dobijamo kao rešenje jednačine $x + n = 0$, ili bilo koje jednačine $x + (n + m) = m$ $(m, n \in N)$. Skup celih brojeva ćemo označavati sa Z (upotrebljavaju se još i oznake D i E). Dakle, $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Za sabiranje i množenje celih brojeva važe zakoni asocijacije i komutacije, kao i zakon distribucije množenja u odnosu na sabiranje. U skupu Z se definiše i binarna operacija *oduzimanje*, tj. *razlika* dva cela broja. Razlika celih brojeva m i n je broj k, takav da je $n + k = m$. Pišemo $k = m - n$, jasno $m - n = m + (-n)$. Skup Z je potpuno uređen po veličini relacijom $\leq$: $\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$. U ovakvom uređenju ne postoji ni maksimum ni minimum skupa Z; svaki broj ima svog neposrednog prethodnika i neposrednog sledbenika, između svaka dva neuzastopna cela broja postoji konačno mnogo celih brojeva.

Međutim, jednačina $2x = 1$ u skupu celih brojeva nema rešenja, tj. u skupu Z ne postoji broj x, takav da je proizvod broja 2 i broja x jednak 1. Zahtev da ova jednačina, kao i sve jednačine oblika $qx = p$, gde $p, q \in Z$ i $q \neq 0$, imaju rešenje, dovodi do proširenja skupa celih brojeva u skup racionalnih brojeva ili razlomaka. Rešenje jednačine $qx = p$ izražavamo u obliku $x = pq^{-1}$. Ovim je definisana binarna operacija *deljenje*, s jednim izuzetkom da se ne može deliti nulom. Količnik brojeva p i q je broj kojim treba pomnožiti broj q da bi se dobio broj p. Označavamo ga sa $p : q$ ili $\frac{p}{q}$, a to je, u stvari, $p \cdot q^{-1}$ $(q \neq 0)$. Racionalan broj je svaki broj oblika $\frac{p}{q}$, gde $p, q \in Z$ i $q \neq 0$. Skup racionalnih brojeva ćemo označavati sa Q. Dakle,

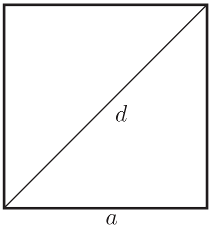
$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| (p, q \in Z) \wedge (q \neq 0) \right\}.$$

Napomenimo da bez ograničenja možemo pretpostaviti da je $q > 0$. Za sabiranje i množenje racionalnih brojeva važe zakoni asocijacije i komutacije, kao i zakon distribucije množenja u odnosu na sabiranje. U skupu $Q \setminus \{0\}$ deljenje je takođe binarna operacija.

Skup racionalnih brojeva potpuno je uređen relacijom $\leq$, tj. za svaka dva racionalna broja a i b važi jedan od sledeća tri odnosa: $a < b$, $a = b$ ili $a > b$. Između dva ma koja racionalna broja a i b postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Naime, ako je $a < b$, tada je broj $c = \dfrac{a+b}{2}$ između brojeva a i b. Isto tako, broj $c_1 = \dfrac{a+c}{2}$ je između brojeva a i c i broj $c_2 = \dfrac{c+b}{2}$ između c i b, tj. $a < c_1 < c < c_2 < b$. Ovaj postupak se može nastaviti i po svojoj prirodi je takav da mu nema kraja, što upravo i znači da između svaka dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Zato kažemo da je skup racionalnih brojeva *svuda gust*.

Ako je $r \in Q$ i $m \in Z$, tada je $r^m \in Q$, ali ako $r, m \in Q$, tada r^m ne mora biti racionalan broj. Na primer, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{64}{125}$ je racionalan broj, dok $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ nije racionalan broj. Pre nego što dokažemo da broj čiji je kvadrat 2 (a koji označavamo sa $\sqrt{2}$) nije racionalan, odnosno da jednačina $x^2 = 2$ nema rešenja u skupu racionalnih brojeva, napomenimo da su u Staroj Grčkoj brojevima davali geometrijski smisao, jer su oni dovođeni u vezu s merenjem veličina. Izmeriti neku veličinu znači uporediti je sa jedinicom mere te veličine, tj. naći koliko se puta jedinica mere sadrži u veličini koja se meri. Na ovaj način se merenoj veličini pridružuje merni broj.

Međutim, sledeći jednostavan primer merenja duži pokazuje da se svakoj duži ne može pridružiti merni broj koji bi bio racionalan. Naime, još su u Staroj Grčkoj pripadnici poznate Pitagorejske[2)] škole (u V i IV veku pre nove ere) znali da su stranica a i dijagonala d kvadrata nesamerljive duži, tj. da je nemoguće naći duž koja bi se ceo broj puta sadržavala i u stranici i u dijagonali kvadrata. Ovo je u vezi sa činjenicom da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Naime, ako bi postojala duž c koja se q puta sadrži u a i p puta u d, gde su p i q celi brojevi, tada bi bilo $a = qc$ i $d = pc$. Kako je, prema Pitagorinoj teoremi, $d = a\sqrt{2}$, dalje bi bilo $pc = qc\sqrt{2}$, tj. $p = q\sqrt{2}$ ili $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, što bi značilo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj.



sl. 1

Dokažimo, međutim, da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, tj. da se ne može predstaviti u obliku $\dfrac{p}{q}$, gde su p i q celi brojevi. Dokaz koji navodimo potiče od Euklida.[3)] Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, tj. NZD $(p, q) = 1$. Ova pretpostavka je bitna i ona se uvek može učiniti, jer ako p i q nisu uzajamno prosti, razlomak $\dfrac{p}{q}$ se može skratiti. Dalje sledi $p = q\sqrt{2}$, tj. $p^2 = 2q^2$, što znači da je p^2, a samim tim i p, deljivo sa 2. Dakle, $p = 2m$, gde $m \in Z$, pa poslednja jednakost daje $4m^2 = 2q^2$, tj. $q^2 = 2m^2$, što znači da je i q^2, a samim tim i q, deljivo sa 2. Dobili smo da je 2 zajednički činilac brojeva p i q, što je suprotno pretpostavci da su p i q uzajamno prosti. Ovim smo dokazali da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Broj $\sqrt{2}$ je *iracionalan.*

Saznanje da odnos dijagonale i stranice kvadrata nije racionalan broj i da se, u skladu sa tim, na primer, dijagonali jediničnog kvadrata ne može pridružiti merni broj koji bi bio racionalan, jeste prvi susret sa iracionalnim brojevima. To saznanje je unelo zabunu među matematičare, jer je teško bilo prihvatiti da se posve određenoj duži, kakva je dijagonala kvadrata, ne može pridružiti merni broj. Pojam iracionalnog broja biće precizno definisan tek dve hiljade godina kasnije, a zasluge za to pripadaju znamenitim

[2)] Pitagora (580–500. god. pre nove ere) starogrčki matematičar.
[3)] Euklid (365?–275? god. pre nove ere), starogrčki matematičar.

matematičarima XIX veka - Dedekindu[4], Kantoru[5] i Vajerštrasu.[6] O nekim Dedekindovim i Kantorovim rezultatima u tom smislu biće reči kasnije u okviru aksiomatske metode izučavanja realnih brojeva.

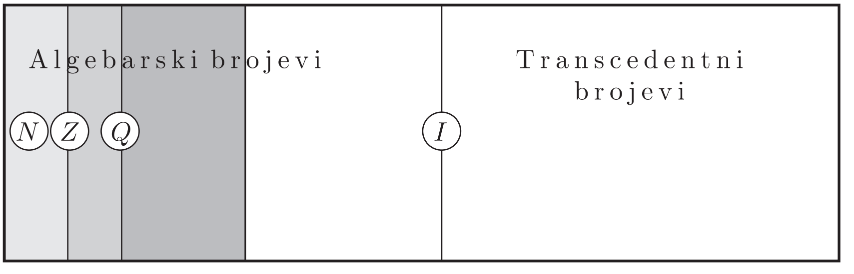
Dakle, pored racionalnih, postoje i iracionalni brojevi. Možemo reći da je broj iracionalan ako se ne može predstaviti u obliku $\frac{p}{q}$, gde $p, q \in Z$ i $q \neq 0$. Skup iracionalnih brojeva ćemo označavati sa I.

Definicija 1. Jednačina oblika

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

gde su koeficijenti a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ celi brojevi, $a_0 \neq 0$ i $n \in N$, je algebarska jednačina n-tog stepena.

Definicija 2. Broj koji predstavlja rešenje algebarske jednačine naziva se *algebarski broj*.



s;. 2

Svi racionalni brojevi su algebarski, jer su rešenja algebarske jednačine prvog stepena $a_0x + a_1 = 0$, $a_0, a_1 \in Z$ i $a_0 \neq 0$. Broj $\sqrt{2}$ je takođe algebarski, jer zadovoljava jednačinu $x^2 - 2 = 0$. Nije teško pokazati da su algebarski iracionalni brojevi: $\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{5}$, $3 + 5\sqrt[4]{7}$ itd. Međutim, postoje iracionalni brojevi koji nisu algebarski, to su *transcedentni* iracionalni brojevi. Brojevi: π, e, $\log_2 5$ itd. su transcedentni iracionalni brojevi.

Unija skupa racionalnih i skupa iracionalnih brojeva je skup realnih brojeva. Uobičajena oznaka za skup realnih brojeva je R. Dakle, $R = Q \cup I$.

Pregled prirodnih, celih, racionalnih, iracionalnih, algebarskih i transcedentnih brojeva dat je na sl. 2.

2. AKSIOME SKUPA REALNIH BROJEVA

Koristeći sve rezultate o svojstvima realnih brojeva do kojih su došli matematičari, moguće je teoriju realnih brojeva zasnovati aksiomatski, tj.

[4] Richard Dedekind (1831–1916), nemački matematičar.

[5] Georg Cantor (1845–1918), nemački matematičar.

[6] Karl Weierstrass (1815–1897), nemački matematičar.

II POGLAVLJE

KARDINALNI BROJ SKUPA

Definicija 1. Za skupove X i Y kažemo da su *ekvivalentni* ako postoji bijekcija $f : X \to Y$.

Pišemo: $X \sim Y$.

Lako je pokazati da je relacija ekvivalentnosti skupova jedna relacija ekvivalencije.

Definicija 2. Ako su skupovi X i Y ekvivalentni, tada kažemo da oni imaju isti *kardinalni broj*, ili istu *moć*.

Pišemo: $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ ili kraće $k(X) = k(Y)$.

Kardinalni broj je, dakle, zajedničko svojstvo skupova jedne klase ekvivalencije relacije $\sim$, tj. $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ *akko* $X \sim Y$. U skladu sa ovim definišemo da je $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ *akko* $X \sim Y_1 \subset Y$.

Definicija 3. Skup X je *konačan* ako je $X = \varnothing$ ($\varnothing$ prazan skup) ili ako postoji $n \in N$, takav da je $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.

Broj n je kardinalni broj skupa X, što znači da je kardinalni broj konačnog skupa jednak broju elemenata tog skupa.

Kardinalni broj praznog skupa $\varnothing$ je 0.

Definicija 4. Za skup kažemo da je *beskonačan* ako nije konačan.

Primer 1. Skup prirodnih brojeva je beskonačan, jer očigledno nije ekvivalentan nijednom svom konačnom podskupu.

Definicija 5. Za skup X kažemo da je *prebrojiv*, ako je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva N.

Da bismo pokazali da je neki skup X prebrojiv, treba pokazati da postoji bijekcija $f : N \to X$ ili, što je isto, da se članovi skup X mogu poređati u jedan niz: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (kao slike redom prirodnih brojeva 1, 2, 3, ... pri preslikavanju $f : N \to X$).

Primer 2. Skup parnih prirodnih brojeva je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva.

Naime, psrelsikavanje koje svakom prirodnom broju n pridružuje broj $2n$ je bijekcija skupa prirodnih brojeva na skup parnih brojeva.

Primer 3. Skup celih brojeva Z je prebrojiv. Očigledno, preslikavanje $f : N \to Z$, dato sa $f(1) = 0$, $f(2n) = n$, $f(2n + 1) = -n$ $(n \in N)$ je bijekcija.

Primer 4. Skup racionalnih brojeva Q je prebrojiv. Kao što je poznato, svaki racionalan broj možemo napisati u obliku nesvodljivog razlomka $\dfrac{p}{q}$ $(p \in Z,\ q \in N)$.

Broj 0 možemo napisati kao $\frac{0}{1}$. Racionalne brojeve $\frac{p}{q}$ možemo poređati u niz prema veličini "*visine*" $h = |p| + q$ na sledeći način:

$$\underbrace{\frac{0}{1}}_{h=1}, \underbrace{\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}}_{h=2}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}}_{h=3}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}}_{h=4}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}}_{h=5}, \ldots$$

što znači da je $Q \sim N$, tj. da je Q prebrojiv.

Primetimo da je u svim navedenim primerima skup ekvivalentan svom pravom podskupu. Naime, skup parnih brojeva je pravi podskup skupa N, dok je skup N pravi podskup skupova Z i Q. Ovo svojstvo imaju samo beskonačni skupovi i ono se ponekad koristi u definiciji beskonačnog skupa.

Za skup koji je konačan ili prebrojiv kaže se da je *najviše prebrojiv.*

Tvrđenje 1. Unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je prvo dato konačno mnogo prebrojivih skupova i neka su njihovi elementi prikazani u obliku niza:

$$\begin{array}{rcllll}
A_1 & = \{ & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots\} \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
A_2 & = \{ & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots\} \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
A_m & = \{ & a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3}, & \ldots\}.
\end{array}$$

Elemente njihove unije $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ takođe možemo prikazati u obliku niza

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \ldots a_{m2}, a_{13}, a_{23}, \ldots, a_{m3}, \ldots,$$

a zatim izvršiti prenumeraciju pošto se eventualni zajednički elementi uzmu samo jedanput

Neka je sada dato prebrojivo mnogo skupova A_i $(i \in N)$

$$\begin{array}{lllll}
A_1 = \{a_{11}, \longrightarrow & a_{12}, & a_{13}, \longrightarrow & a_{14}, \ldots\} \\
\qquad\quad \swarrow & \nearrow & \swarrow & \\
A_2 = \{a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, \ldots\} \\
\qquad\quad \downarrow \quad \nearrow & \swarrow & & \\
A_3 = \{a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, \ldots\} \\
\qquad\quad \swarrow & & & \\
A_4 = \{a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, \ldots\} \\
\qquad\quad \downarrow & & & \\
 & \ldots & &
\end{array}$$

Elemente njihove unije $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ možemo poređati u niz, na primer, onako kako to pokazuju strelice i izvršiti prenumeraciju zbog eventualnih ponavljanja elemenata.

Dakle, u oba slučaja unija datih skupova je prebrojiva.

Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva i uopšte prebrojivih skupova označava se sa $\aleph_0$ (*alef-nula*). Dakle, card $N = \aleph_0$. Postavlja se sada pitanje: postoje li beskonačni skupovi koji nisu prebrojivi? Odgovor daje sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2 (*Kantor*). Skup realnih brojeva intervala $(0, 1)$ nije prebrojiv.

Dokaz. Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ proizvoljan niz realnih brojeva iz intervala $(0, 1)$. Svaki član niza možemo prikazati pomoću beskonačnog decimalnog zapisa:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

gde $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$. Broj čiji je decimalni zapis

$$x = 0, a_1a_2a_3\ldots,$$

takav da je

$$a_i = \begin{cases} 2, & \text{ako je} \quad a_{ii} = 1 \\ 1, & \text{ako je} \quad a_{ii} \neq 1 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

očigledno pripada intervalu $(0, 1)$, ali se razlikuje od svih članova niza (1). Naime, x se od x_1 razlikuje u prvoj decimali, od x_2 u drugoj, od x_3 u trećoj itd. Sledi da nijedan niz brojeva iz intervala $(0, 1)$ ne sadrži sve brojeve iz tog intervala što, upravo, i znači da skup realnih brojeva intervala $(0, 1)$ nije prebrojiv.

Sada nije teško pokazati da je skup realnih brojeva proizvoljnog intervala (a, b) ekvivalentan skupu realnih brojeva intervala $(0, 1)$. Naime, linearna funkcija $y = (b-a)x + a$ $(a \neq b)$ je bijekcija intervala $(0, 1)$ na interval (a, b), (sl. 1).

Funkcija $y = \operatorname{tg} \dfrac{2x-1}{2}\pi$ obostrano jednoznačno preslikava interval $(0, 1)$ na skup svih realnih brojeva R (sl. 2), pa sledi da je skup R ekvivalentan interavalu $(0, 1)$, a samim tim i svakom intervalu (a, b).

IV POGLAVLJE

BESKONAČNI BROJEVNI NIZOVI

1. DEFINICIJA I NAČINI ZADAVANJA BESKONAČNOG NIZA

Definicija 1. Funkcija f, koja preslikava skup prirodnih brojeva N u skup A je *beskonačni niz u skupu* A.

Ako je $f(x) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3, \ldots,\ f(n) = a_n, \ldots$, tada se niz može zapisati u obliku

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots),$$

ili jednostavnije bez zagrada:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Kaže se da su $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *članovi* niza. Svaki niz ima beskonačno mnogo članova. Član $a_n = f(n)$ naziva se *opšti član* niza. Ako je poznat opšti član niza, tada se niz može jednostavno označiti sa $(a_n)_{n \in N}$, pri čemu se $n \in N$ u indeksu može izostaviti, jer se podrazumeva. Niz se može zadati i rekurentnom formulom, na primer, oblika

$$a_1 = b, \quad a_{n+1} = g(a_n) \quad (n \in N)$$

ili oblika

$$a_1 = b, \quad a_2 = c, \quad a_{n+2} = h\left(a_n, a_{n+1}\right) \quad (n \in N).$$

Skup vrednosti niza $(a_n)_{n \in N}$ je skup $V = \{a_n | \, n \in N\}$. On može biti konačan ili beskonačan (prebrojiv).

Mi ćemo isključivo razmatrati nizove čiji su članovi realni brojevi.

Navodimo nekoliko primera nizova.

Primer 1. Niz $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, tj. niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in N}$ naziva se *harmonijski* niz.

Primer 2. Niz čiji je opšti član $a_n = 1 + (-1)^n$ je, u stvari, niz

$$0, 2, 0, 2, \ldots, 0, 2, \ldots.$$

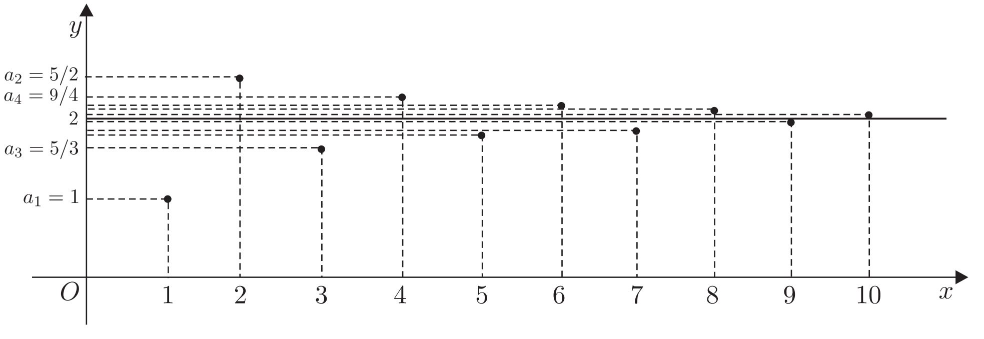
Primer 3. Niz čiji je opšti član $a_n = 1^n$ je konstantan niz

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

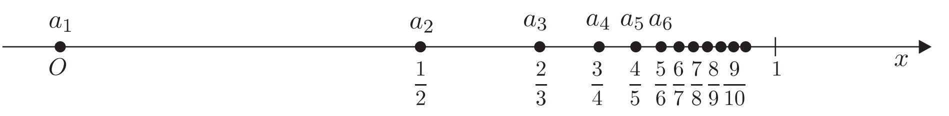
Kao što se vidi, skup vrednosti niza u Primeru 1 je beskonačan skup $V_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, u Primeru 2 dvočlan skup $V_2 = \{0, 2\}$, a u Primeru 3 jednočlan skup $V_3 = \{1\}$.

Niz, kao i svaku funkciju jedne promenljive, možemo grafički predstaviti u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, a možemo i na brojevnoj osi.

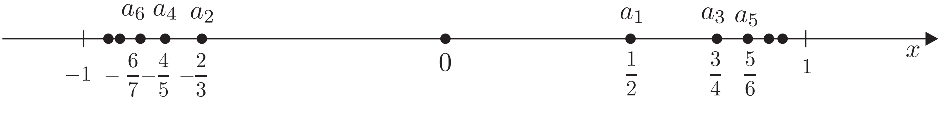
Primer 4. Nizovi čiji su opšti članovi $a_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n-1}{n}$, $c_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$, $d_n = \frac{n+1}{2}$ predstavljeni su grafički redom na slikama 1, 2, 3, 4.



sl. 1

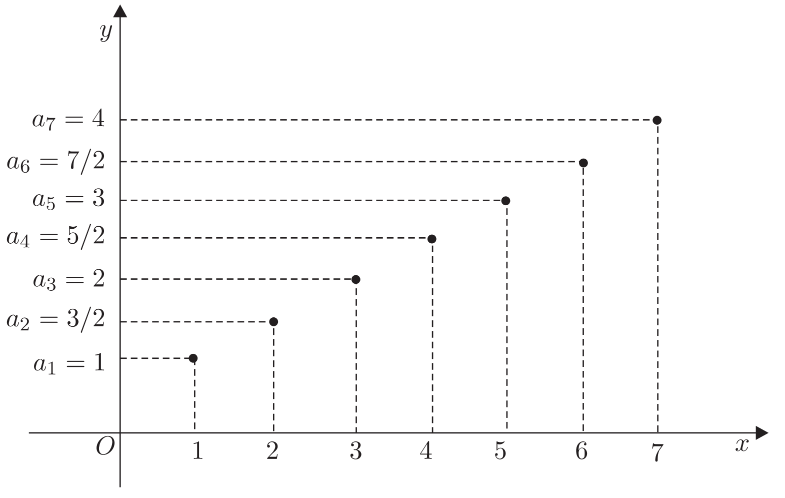


sl. 2



sl. 3

Definicija 2. Ako su $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$ dati nizovi, tada su nizovi $(a_n + b_n)_{n\in N}$, $(a_n - b_n)_{n\in N}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in N}$ i $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ redom *zbir*, *ralzika*, *proizvod* i *količnik* nizova $(a_n)_{n\in N}$ i $(b_n)_{n\in N}$.



sl. 4

Napomena 1. Niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ moguće je obrazovati samo u slučaju kad su svi članovi niza $(b_n)_{n\in N}$ različiti od nule. Niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ se može obrazovati i u slučaju kad je konačno mnogo članova niza $(b_n)_{n\in N}$ jednako nuli, počev od onog indeksa od koga su svi članovi b_n različiti od nule.

Definicija 3. Niz $(a_n)_{n\in N}$ je *ograničen odozgo* (*odozdo*) ako postoji realan broj $M(m)$, takav da je

$$a_n \leq M \quad (a_n \geq m) \quad (n \in N).$$

Broj M se naziva *majoranta* (*gornja granica*), a broj m *minoranta* (*donja granica*) niza $(a_n)_{n\in N}$.

Definicija 4. Niz $(a_n)_{n\in N}$ je ograničen ako je ograničen i odozgo i odozdo, tj. ako postoje realni brojevi M i m, tako da za sve članove niza a_n važi nejednaksot

$$m \leq a_n \leq M. \tag{1}$$

Jasno, ograničen niz ima beskonačno mnogo majoranti, odnosno minoranti, pa utvrđivanje ograničenosti niza svodi se na pronalaženje bar jedne majorante, odnosno minorante tog niza.

Primetimo da se uslov ograničenosti niza može precizirati i u drugoj ekvivalentnoj formi: niz $(a_n)_{n\in N}$ je ograničen ako postoji pozitivan broj G, takav da za svaki član niza važi

$$|a_n| \leq G. \tag{2}$$

Zaista, ako svaki član niza $(a_n)_{n\in N}$ zadovoljava relaciju (1), to uzimajući da je $G = \max\{|m|, |M|\}$, očigledno važi (2). Obrnuto, ako svaki član niza $(a_n)_{n\in N}$ zadovoljava relaciju (2), tada uzimajući da je $m = -G$ i $M = G$, sledi (1).

Primer 5. Niz $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)_{n\in N}$ je oganičen. Naime, $0 \leq a_n < 1$ za svako $n \in N$. Najmanji član niza je 0, dok najveći ne postoji.

Primer 6. Niz

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$$

je ograničen odozdo, ali nije odozgo.

2. GRANIČNA VREDNOST NIZA

Ovde će nas intersovati kako se ponašaju članovi niza sa rašćenjem indeksa. Razmotrimo zato ponovo nizove u Primeru 4 koje smo i grafički predstavili. Primetimo da se članovi niza $(a_n)_{n\in N}$ nagomilavaju oko tačke (realnog broja) 2 u sledećem smislu: ako uzmemo proizvoljnu, pa i koliko hoćemo malu okolinu tačke 2, svi članovi niza, počev od nekog indeksa, su u toj okolini. Istu osobinu ima broj 1 kod niza $(b_n)_{n\in N}$. Za niz $(a_n)_{n\in N}$ takav broj ne postoji. Najzad, vidimo da se članovi niza $(d_n)_{n\in N}$ s rastom indeksa beskonačno uvećavaju. Naime, ako uzmemo proizvoljan pozitivan realan broj, pa i po volji veliki, svi članovi niza, počev od nekog indeksa, su veći od tog broja.

Dajemo sada definiciju granične vrednosti (limesa) niza.

Definicija 5. Realan broj (tačka) a je *granična vrednost* niza $(a_n)_{n\in N}$ ako za svaku okolinu $\mathcal{O}(a)$ tačke a postoji prirodan broj n_0, koji zavisi od izabrane okoline $\mathcal{O}(a)$, tako da svi članovi niza a_n za $n > n_0$ pripadaju okolini $\mathcal{O}(a)$.

Piše se po dogovoru

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

(čita se: limes od a_n, kad n teži u beskonačnost, je a).

Formalno-logički zapis date definicije je:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff (\forall\mathcal{O}(a))(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n > n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}(a)).$$

Uobičajenija od date je definicija granične vrednosti niza pomoću ε-okolina tačke.

V POGLAVLJE

GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE

1. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

1.1. Pojam granične vrednosti funkcije

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na skupu D i neka je a tačka nagomilavanja skupa D. Interesuje nas ponašanje vrednosti funkcije $y = f(x)$ za vrednosti argumenta koje su bliske tački a, tj. interesuje nas da li vrednosti funkcije $y = f(x)$ teže nekoj tački b kad vrednosti argumenta teže tački a.

Definicija 1. Tačka (broj) b je *granična vrednost* ili *granica* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ (ili kad x teži a) ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, koji zavisi od ε, tako da je za sve vrednosti argumenta x koje zadovoljavaju nejednakost $0 < |x - a| < \delta$, zadovoljena nejednakost $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Piše se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

ili

$$f(x) \to b \quad \text{kad} \quad x \to a.$$

Tačka a naziva se *granična tačka.*

Sadržaj Definicije 1 može se zapisati na sledeći način:

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

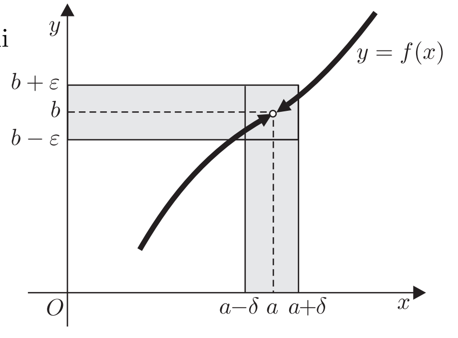
Umesto $0 < |x - a| < \delta$ pisaćemo i $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, a umesto $|f(x) - b| < \varepsilon$, $b - \varepsilon < f(x) < b + f(x)$ ili $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Vidi sl. 1.

Primer 1. Dokazati da je

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = 1.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Sledi niz ekvivalentnih nejednakosti

$$\left|\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\right| < \varepsilon,$$
$$\frac{|x-4|}{2} < \varepsilon,$$
$$|x-4| < 2\varepsilon.$$



sl. 1

Ako uzmemo da je $\delta = 2\varepsilon$ (ili bilo koji pozitivan broj manji od 2ε), tada za sve vrednosti argumenta x za koje je $0 < |x-4| < \delta$ sledi da je $\left|\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\right| < \varepsilon$. Ovo upravo znači da je $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 1$.

Primer 2. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Primetimo da funkcija $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ nije definisana u tački $x = 1$ i da je $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-2} = x + 1$ $(x \neq 1)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada je

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \iff |x + 1 - 2| < \varepsilon \iff |x - 1| < \varepsilon \quad (x \neq 1).$$

Ako stavimo $\delta = \varepsilon$, tada za sve vrednosti promenljive x, za koje je $0 < |x-1| < \delta$ važi $|f(x) - 2| < \varepsilon$, što i znači da je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

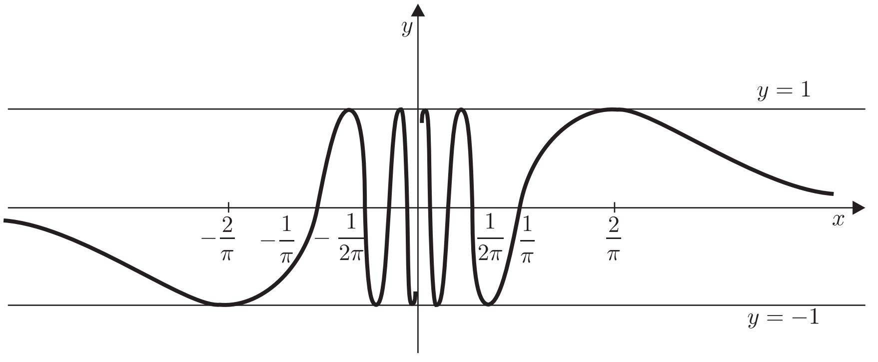
Dajemo još jednu definiciju granične vrednosti funkcije.

Definicija 2. Tačka (broj) b je *granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz $(x_n)_{n\in N}$ vrednosti argumenta x, koji konvergira ka a i $x_n \neq a$ $(n \in N)$, odgovarajući niz $(f(x_n))_{n\in N}$ vrednosti funkcije konvergira ka b.

Primer 3. Koristeći Definiciju 2 pokazati da funkcija $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ nema graničnu vrednost u tački $x = 0$.

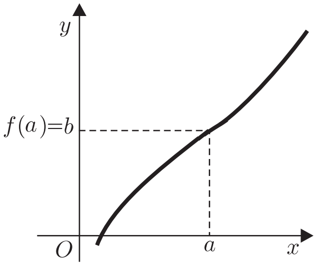
Grafik funkcije dat je na sl. 2. Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x = 0$ zato što, na primer, niz $(x_n)_{n\in N}$, gde je $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$, konvergira ka nuli, dok odgovarajući niz vrednosti funkcije $(f(x_n))_{n\in N}$, gde je $f(x_n) = (-1)^n$, nema graničnu vrednost.

Na sl. 1 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ koja ima graničnu vrednost b u tački $x = a$ u kojoj nije definisana.

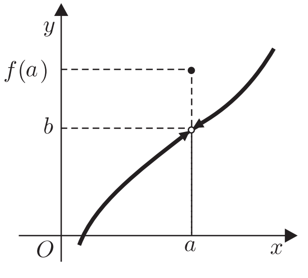


sl. 2

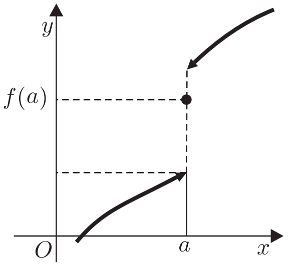
Na sl. 3 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ čija je granična vrednost b u tački $x = a$ jednaka vrednosti funkcije u toj tački, tj. $f(a) = b$.



sl. 3



sl. 4



sl. 5

Na sl. 4 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ koja je definisana u tački $x = a$, ima graničnu vrednost b u tački $x = a$ i pri tome je $f(a) \neq b$.

Najzad, na sl. 5 grafički je predstavljena funkcija $y = f(x)$ koja je definisana u tački $x = a$, ali nema graničnu vrednost u toj tački.

Iako to sledi iz definicije granične vrednosti funkcije, ipak podvucimo da ne treba mešati graničnu vrednost funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i vrednost $f(a)$, tj. vrednost funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$.

Primer 4. Granična vrednost konstante $f(x) = C$ u proizvoljnoj tački $a \in R$ jednaka je C.

Zaista, za dato $\varepsilon > 0$ možemo uzeti da je δ proizvoljan pozitivan broj. Tada za svako x, takvo da je $0 < |x - a| < \delta$ je

$$|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x \to a} C = C.$$

Primer 5. Granična vrednost identične funkcije $f(x) = x$ u proizvoljnoj tački $a \in R$ je a.

Naime, za dato $\varepsilon > 0$ možemo uzeti da je δ broj za koji važi: $0 < \delta \leq \varepsilon$. Tada za $0 < |x - a| < \delta$ je

$$|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

1.2. Leva i desna granična vrednost funkcije

Definicija 3. Broj b_l je *leva granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, tako da je za sve vrednosti x iz intervala $(a - \delta, a)$ zadovoljena nejednakost $|f(x) - b_l| < \varepsilon$.

Broj b_d je *desna granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ, tako da je za sve vrednosti x iz intervala $(a, a + \delta)$ zadovoljena nejednakost $|f(x) - b_d| < \varepsilon$.

Piše se

$$b_l = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ili} \quad b_l = \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{ili} \quad b_l = f(a - 0),$$
$$b_d = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ili} \quad b_d = \lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{ili} \quad b_d = f(a + 0).$$

Vidi sl. 6.

Leva i desna granična vrednost funkcije $y = f(x)$ u nuli označava se na sledeći način: $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x)$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Leva i desna granična vrednost funkcije mogu se definisati i pomoću nizova.

Definicija 4. Broj b_l je *leva granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz $(x_n)_{n \in N}$, takav da $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ i $x_n < a$ $(n \in N)$, $f(x_n) \to b_l$ $(n \to +\infty)$.

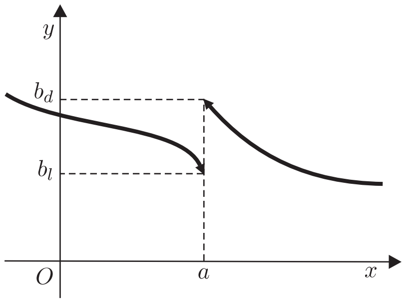
Broj b_d je *desna granična vrednost* funkcije $y = f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz $(x_n)_{n \in N}$, takav da $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ i $x_n > a$ $(n \in N)$, $f(x_n) \to b_d$ $(n \to +\infty)$.

Primer 6. Ako je

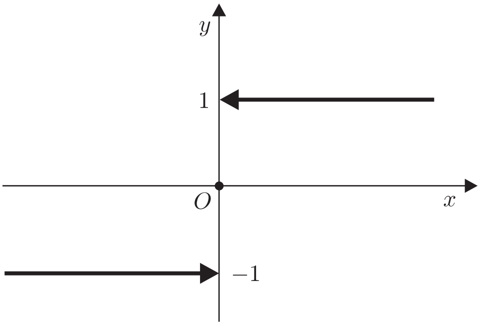
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{ako je} \quad x > 0 \\ 0 & \text{ako je} \quad x = 0 \\ -1 & \text{ako je} \quad x < 0, \end{cases}$$

Naći $f(+0)$ i $f(-0)$.

Funkcija je grafički predstavljena na sl. 7.



sl. 6



sl. 7

Ako je $(x_n)_{n\in N}$ niz pozitivnih realnih brojeva koji konvergira ka nuli, tada je $f(x_n) = 1$ za svako $n \in N$, pa je i $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} f(x) = 1$.

Analogno se pokazuje da je $f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} f(x) = -1$.

Tvrđenje 1. Funkcija $y = f(x)$ u tački $x = a$ ima graničnu vrednost *akko* ona u toj tački ima levu i desnu graničnu vrednost i ako su jednake.

Dokaz. Sledi iz definicije granične vrednosti i leve i desne granične vrednosti funkcije.

1.3. Granična vrednost funkcije kad $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$. Beskonačna granična vrednost

Definicija 5. Broj b je granična vrednost funkcije $y = f(x)$ kad $x \to +\infty$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $M > 0$, koji zavisi od ε, tako da je za svako $x > M$ zadovoljena nejednakost $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Piše se

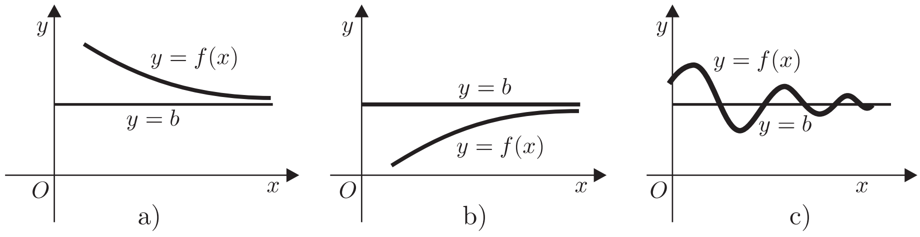
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad f(x) \to b \quad \text{kad} \quad x \to +\infty.$$

Vidi sl. 8 a, b i c.

Definicija 6. Broj b je granična vrednost funkcije $y = f(x)$ kad $x \to -\infty$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $K < 0$, koji zavisi od ε, tako da je za svako $x < K$ zadovoljena nejednakost $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Piše se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad f(x) \to b \quad \text{kad} \quad x \to -\infty.$$



sl. 8

Primer 7. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+5}{x+1} = 2.$
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada je

$$\left|\frac{2x+5}{x+1} - 2\right| < \varepsilon \iff \frac{3}{|x+1|} < \varepsilon \iff |x+1| > \frac{3}{\varepsilon} \iff$$

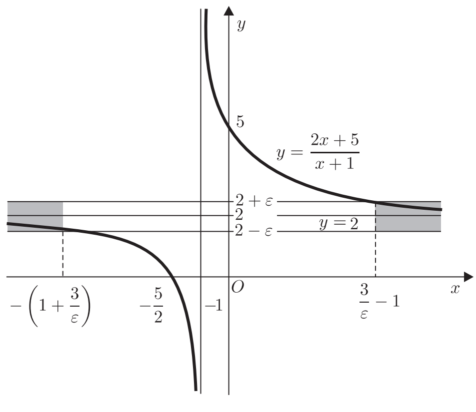
$$\iff \left(x+1 < -\frac{3}{\varepsilon} \vee x+1 > \frac{3}{\varepsilon}\right) \iff \left(x < -\left(1+\frac{3}{\varepsilon}\right) \vee x > \frac{3}{\varepsilon} - 1\right).$$

Uzmimo da je $M = \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$ (ili bilo koji veći broj). Tada za svako $x > M$ važi nejednakost $\left|\dfrac{2x+5}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$, tj.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x+1} = 2.$$

Uzmimo da je $K = -\left(1+\dfrac{3}{\varepsilon}\right)$ (ili bilo koji manji broj). Tada za svako $x < K$ važi nejednakost $\left|\dfrac{2x+5}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$, tj.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{x+1} = 2.$$



sl. 9

Vidi sl. 9.

Definicija 7. Kažemo da granična vrednost funicije $y = f(x)$ u tački $x = a$ iznosi $+\infty$ ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$, koji zavisi od M, tako da je za sve vrednoti promenljive x koje zadovoljavaju nejednakost $0 < |x-a| < \delta$, zadovoljena nejednakost $f(x) > M$.

Piše se

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{ili} \quad f(x) \to +\infty \quad \text{kad} \quad x \to a.$$

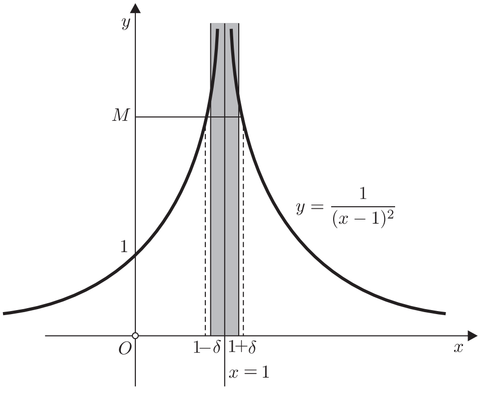
Analogno se definiše $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Primer 8. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Neka je $M > 0$ proizvoljan realan broj. Tada je $\dfrac{1}{(x-1)^2} > M \iff 0 < (x-1)^2 < \dfrac{1}{M} \iff 0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$. Uzmimo da je $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ (ili bilo koji pozitivan broj manji od $\dfrac{1}{\sqrt{M}}$). Tada za svako x za koje je $0 < |x-1| < \delta$ važi nejednakost $f(x) > M$, tj.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Vidi sl. 10.



sl. 10

Definicija 8. Kažemo da granična vrednost funkcije $y = f(x)$ iznosi $+\infty$ kad $x \to +\infty$ ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji realan broj $P > 0$ koji zavisi od M, tako da je za sve vrednosti promenljive $x > P$, $f(x) > M$.

Piše se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ili} \quad f(x) \to +\infty \quad \text{kad} \quad x \to +\infty.$$

Analogno se definiše

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

1.4. Svojstva graničnih vrednosti funkcija

Tvrđenje 2. Ako funkcia $y = f(x)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$, ona je jedinstvena.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da funkcija u tački $x = a$ ima dve različite granične vrednosti: b i c. Pošto je $b \neq c$, rastojanje $|b-c|$ je pozitivno. Stavimo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|b-c|$. Tada postoje $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$, tako da iz nejednakosti $0 < |x-a| < \delta_1$ sledi nejednakost $|f(x)-b| < \varepsilon$, a iz nejednakosti $0 < |x-a| < \delta_2$ nejednakost $|f(x)-c| < \varepsilon$. Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada je za svako x za koje je $0 < |x-a| < \delta$:

$$|b-c| = |f(x)-c+b-f(x)| \leq |f(x)-c| + |f(x)-b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b-c|,$$

tj.

$$|b-c| < |b-c|,$$

što je nemoguće. Dakle, $b = c$, što je i trebalo dokazati.

Tvrđenje 3. Ako je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$$

i ako postoji okolina tačke a, tako da je za svako x iz te okoline, osim možda u tački $x = a$,

$$f(x) \le h(x) \le g(x),$$

tada je i

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Dokaz. Ako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj, tada postoje $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$, tako da iz nejednakosti $0 < |x-a| < \delta_1$ sledi nejednakost $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, a iz nejednakosti $0 < |x-a| < \delta_2$ nejednakost $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$. Prema uslovu tvrđenja postoji $\delta \le \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tako da za vrednosti promenljive x koje zadovoljavaju nejednakost $0 < |x-a| < \delta$ važi

$$b - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < b + \varepsilon,$$

tj.

$$b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon.$$

Ovo upravo znači da je

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Tvrđenje 4. Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, tada je

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$,

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = b - c$,

c) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(c \ne 0)$.

Dokaz. Ako je $(x_n)_{n\in N}$ $(x_n \ne a)$ proizvoljni niz vrednosti promenljive x iz preseka domena funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$ koji konvergira ka a, tj. $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$, tada $f(x_n) \to b$ i $g(x_n) \to c$ $(n \to +\infty)$. Na osnovu istog tvrđenja za nizove (Tvrđenje 10, IV poglavlje) sledi da je

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = b + c$,

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - g(x_n)) = b - c$,

c) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) \cdot g(x_n)) = b \cdot c$,

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$ $(c \ne 0)$.

Napomenimo da Tvrđenje 4 važi i da se dokazuje na isti način i u slučaju kada je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = c$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = c$).

VI POGLAVLJE

IZVODI I DIFERENCIJALI

1. IZVODI

1.1. Pojam prvog izvoda funkcije

Definicija 1. Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 i neka je $\triangle x$ priraštaj nezavisno promenljive x_0, tako da i tačka $x_0 + \triangle x$ pripada toj okolini. Granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

ukoliko postoji, naziva se *prvi izvod* funkcije $y = f(x)$ u tački x_0.

Ako je

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = -\infty,$$

tada kažemo da funkcija $y = f(x)$ u tački x_0 ima *beskonačan prvi izvod* koji je jednak $+\infty$, odnosno $-\infty$.

Kad kažemo da funkcija ima prvi izvod, podrazumevaćemo da ima konačan prvi izvod.

Napomenimo da se prvi izvod (ili vrednost prvog izvoda) funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 može definisati i na sledeći način: ako je funkcija $y = f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 i ako je x proizvoljna tačka te okoline, tada je granična vrednost

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ukoliko postoji, prvi izvod (vrednost prvog izvoda) funkcije $y = f(x)$ u tački x_0.

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u svakoj tački $x \in X$, tada se njen izvod y', odnosno $f'(x)$ može razmatrati kao funkcija od x, definisana na skupu X.

Primer 1. Izvod konstante $y = C$ u proizvoljnoj tački $x \in R$ jednak je nuli. Naime,

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{0}{\triangle x} = 0.$$

Primer 2. Izvod funkcije $y = x$ u proizvoljnoj tački $x \in R$ jednak je 1. Naime,

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1.$$

Primer 3. Izvod funkcije $y = \sqrt[3]{x^2}$ je

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+\triangle x)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\triangle x} = \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 - x^2}{\triangle x(\sqrt[3]{x+\triangle x)^4} + \sqrt[3]{x^2(x+\triangle x)^2} + \sqrt[3]{x^4})} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2x+\triangle x)}{3\triangle x\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad (x \neq 0).
\end{aligned}
$$

1.2. Levi i desni izvod funkcije

Definicija 2. Leva (desna) granična vrednost

$$
f'_-(x_0) = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \left(f'_+(x) = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \right)
$$

naziva se *levi (desni) izvod* funkcije $y = f(x)$ u tački x_0.

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0, tada ona u toj tački ima i desni i levi izvod koji su jednaki. Obrnuto, ne mora da bude tačno.

Primer 4. Funkcija $f(x) = |x|$ ima desni i levi izvod u tački $x = 0$. Zaista,

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{(0+\triangle x) - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1, \\
f'_-(0) &= \lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{-(0+\triangle x) - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{-\triangle x}{\triangle x} = -1.
\end{aligned}
$$

Kako je $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, to znači da ne postoji $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, tj. ne postoji prvi izvod funkcije u tački $x = 0$.

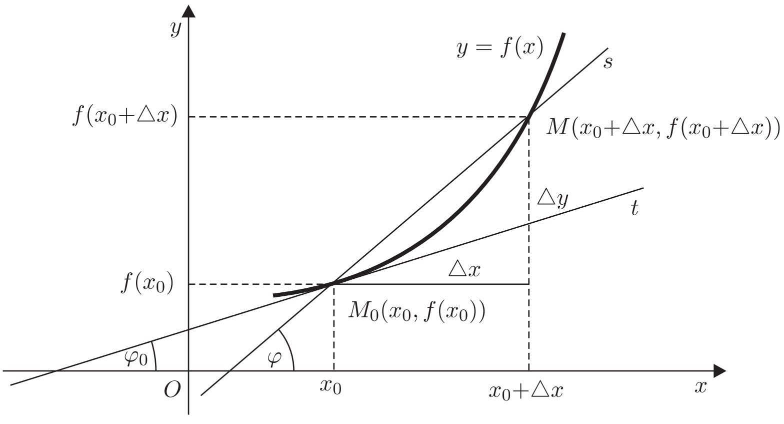
Iz tvrđenja o levoj i desnoj graničnoj vrednosti (Tvrđenje 1, odeljak 1.2, V poglavlje) sledi da funkcija, definisana u nekoj okolini tačke x_0, ima prvi izvod $f'(x_0)$ *akko* postoje $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Tada je $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

1.3. Geometrijski smisao prvog izvoda

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 i neka je u x_0 neprekidna. Neka tačka $x_0 + \triangle x$ pripada toj okolini i neka su $f(x_0)$ i $f(x_0 + \triangle x)$ vrednosti funkcije $y = f(x)$ redom u tačkama x_0 i $x_0 + \triangle x$.

Koeficijent pravca sečice s grafika funkcije $y = f(x)$ koja prolazi kroz tačke $M_0(x_0, f(x_0))$ i $M(x_0 + \triangle x, f(x_0 + \triangle x))$ je

$$
k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},
$$



sl. 1

gde je φ ugao koji sečica obrazuje sa osom Ox (sl. 1).

Kad $\triangle x \to 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije u tački x_0 i $\triangle y \to 0$, pa tačka M teži tački M_0, čime nastaje granični položaj sečice koji nazivamo tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$. Njen koeficijent pravca je

$$k_t = \operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

gde je φ_0 ugao koji tangenta t obrazuje sa osom Ox.

Dakle, *prvi izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 jednak je koeficijentu pravca tangente t grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$.*

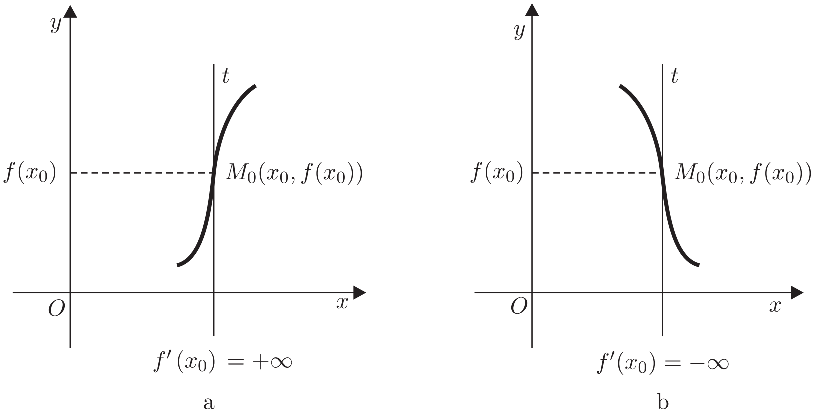
Ako je $f'(x_0)$ konačan, tj. realan broj, tada je jednačina tangente

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

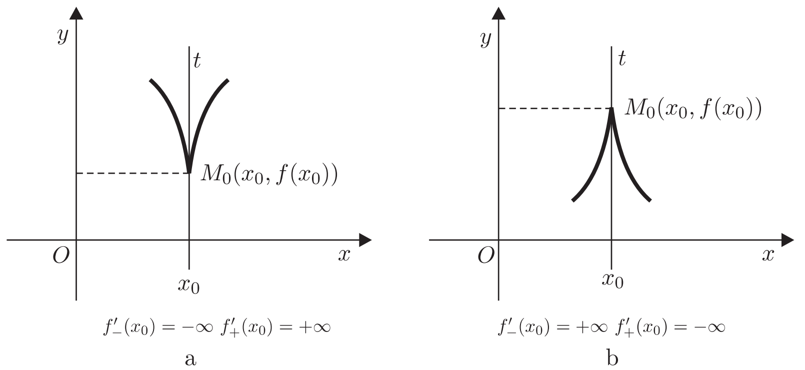
Ako je $f'(x_0) = +\infty$ ili $f'(x_0) = -\infty$, tada je jednačina tangente $t : x = x_0$. Vidi sl. 2 a, b.

Napominjemo da i u slučaju kad je $f'_-(x_0) = -\infty$, $f_+(x_0) = +\infty$ ili $f'_-(x_0) = +\infty$, $f_+(x_0) = -\infty$, dakle, kad ne postoji ni konačan ni beskonačan prvi izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0, postoji tangenta grafika funkcije u tački $M_0(x_0, f(x_0))$ čija je jednačina takođe $x = x_0$ (sl. 3 a, b).

Istaknimo još da je levi (desni) izvod funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 jednak koeficijentu pravca leve (desne) tangente grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$ (sl. 4). U gore razmatranom slučaju, kad su levi i desni izvod fukcije $y = f(x)$ u tački x_0 beskonačni, ali različitog znaka, leva i desna tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$ se poklapaju.



sl. 2



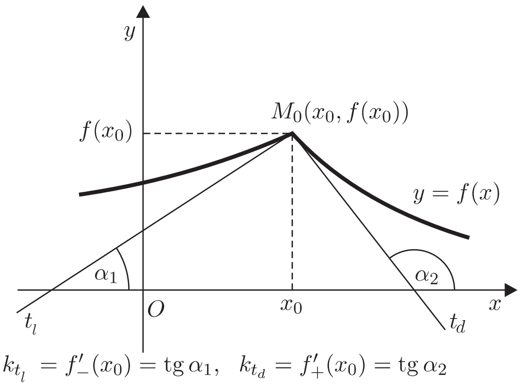
sl. 3

1.4. Fizički (mehanički) smisao prvog izvoda

Neka je zakon kretanja tela dat formulom $s = f(t)$, gde je t vreme, a s pređeni put. Nađimo brzinu tela u vremenskom trenutku t_0. Pred nama je težak zadatak: definicija *trenutne brzine* tela u kretanju. Kako su dužina pređenog puta s i vreme t osnovne fizičke veličine koje se mogu meriti, razmišljaćemo na sledeći način.

Neka je telo u vremenskom trenutku t_0 (tj. za vreme t_0) prešlo put $s_0 = f(t_0)$, a u vremenskom trenutku $t_0 + \triangle t$ put $s_0 + \triangle s = f(t_0 + \triangle t)$. Dakle, u vremenskom intervalu od t_0 do $t_0 + \triangle t$ telo je prešlo put $\triangle s = f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)$. *Srednja brzina* kretanja tela u vremenskom intervalu od t_0 do $t_0 + \triangle t$ je

$$v_{sr} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t}.$$



sl. 4

U opštem slučaju, srednja brzina v_{sr} zavisi od momenta vremena t_0 i dužine trajanja kretanja $\triangle t$. Da bismo dobili trenutnu brzinu u trenutku t_0, računaćemo srednju brzinu na sve kraćim i kraćim vremenskim intervalima od t_0 do $t_0 + \triangle t$, tj. za sve manje $\triangle t$. Na ovaj način dobijamo da je trenutna brzina u vremenskom trenutku t_0 jednaka graničnoj vrednosti od v_{sr} kad $\triangle t$ teži nuli, tj.

$$v = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t}.$$

Dakle, *trenutna brzina tela, čiji je zakon kretanja dat sa* $s = f(t)$, *u vremenskom tenutku* t_0 *jednaka je prvom izvodu funkcije* $s = f(t)$ *za* $t = t_0$, tj. $v\big|_{t=t_0} = f'(t_0)$.

Primer 5. Neka se telo kreće pravolinijski konstantnom brzinom v. Dužina pređenog puta s od trenutka $t = 0$ do nekog trenutka t je

$$s = f(t) = vt.$$

U vremenskom intervalu od t_0 do $t_0 + \triangle t$ telo pređe put

$$\triangle s = f(t_0 + \triangle t) - f(t_0) = v(t_0 + \triangle t) - vt_0 = v\triangle t.$$

Primetimo da pređeni put ne zavisi od trenutka t_0, već samo od dužine vremenskog intervala $\triangle t$.

Srednja brzina na intervalu do t_0 do $t_0 + \triangle t$ je

$$v_{sr} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{v\triangle t}{\triangle t} = v,$$

tj. jednaka je brzini kretanja, što je razumljivo, jer je brzina kretanja konstanta. Naravno, i trenutna brzina u vremenskom trenutku t_0 jednaka je v $\left(\lim\limits_{\triangle t\to 0} \dfrac{\triangle s}{\triangle t} = v\right)$.

5. METODA PARCIJALNE INTEGRACIJE

Tvrđenje 2. Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne za svako $x \in (a,b)$ i ako postoji primitivna funkcija funkcije $v(x)u'(x)$ za svako $x \in (a,b)$, tada postoji i primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ za svako $x \in (a,b)$ i važi formula

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \tag{5}$$

odnosno, formula

$$\int udv = u(x)v(x) - \int vdu. \tag{5'}$$

Dokaz. Dokaz tvrđenja direktno sledi iz formule za diferencijal proizvoda dve funkcije

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Odavde, integracijom dobijamo, za svako $x \in (a,b)$

$$\int d(uv) = u \cdot v = \int vdu + \int udv,$$

odakle direktno sledi tvrđenje, odnosno formula $(5')$.

Formula (5), odnosno (5') zove se *formula parcijalne integracije.*

Primer 7. Izračunati integral $\int xe^x dx$.

Ako uzmemo da je $u = x$ i $dv = e^x dx$, sledi da je $du = dx$ i $v = e^x$, pa primenom formule $(5')$ dobijamo

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Primer 8. Izračunati integral $\int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x dx$.

Neka je $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = xdx$. Sledi $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$. Korišćenjem formule $(5')$ dobijamo

$$\int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arc\,tg} x) + C = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + C.$$

Metodom parcijalne integracije, primenjenom jedan ili više puta, izračunavaju se integrali sledećeg oblika:

$$\int P_n(x)\operatorname{arc\,tg} x dx,$$

$$\int P_n(x)\arcsin x dx, \quad \int P_n(x)\ln^k x dx \ (k \in N), \quad \int P_n(x)\cos ax dx,$$

$$\int P_n(x)\sin ax dx, \quad \int P_n(x)e^{ax} dx,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena.

Navedimo neke integrale koji se izračunavaju metodom parcijalne integracije

1. (a) $\int e^{ax}\cdot\cos bx dx$; (b) $\int e^{ax}\cdot\sin bx dx$.

(a) Ako stavimo $u = e^{ax}$ i $dv = \cos bx dx$, tada je $du = a\cdot e^{ax}dx$ i $v = \frac{1}{b}\sin bx$, pa je

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\sin bx dx.$$

Integral $\int e^{ax}\sin bx dx$ izračunavamo primenom formule $(5')$ uzimajući da je $u = e^{ax}$ i $dv = \sin bx$, odakle dobijamo da je $du = a\cdot e^{ax}dx$ i $v = -\frac{1}{b}\cos bx$. Dakle,

$$\int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Sledi

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx dx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx,$$

a odavde konačno dobijamo

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

(b) Analogno dobijamo

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

2. Integrali $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$, koje smo razmotrili u prethodnom odeljku, mogu se izračunati i metodom parcijalne integracije.

Nađimo integral $\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$.

Ako uzmemo da je $u = \sqrt{a^2 + x^2}$ i $dv = dx$, tada je $du = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ i $v = x$, pa sledi da je

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{a^2 + x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx,$$

tj.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2}dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

odnosno

$$2\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$$

i konačno

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$$

Sličnim postupkom mogu se izračunati i preostala dva integrala.

3. Izračunajmo integral $I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ $(n \in N)$.

Za $n = 1$ imamo poznati integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Neka je $n > 1$. Tada je

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int x \cdot \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Dobijeni integral računamo primenom metode parcijalne integracije. Uzimamo $u = x$ i $dv = \dfrac{xdx}{(x^2 + a^2)^n}$, odakle je $du = dx$ i

$$v = \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Sledi

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right),$$

tj.

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} I_{n-1},$$

i konačno

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\right) \quad (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{6}$$

Formula tipa (6) naziva se *rekurentna formula* (od latinske reči *recurrens* – povratno).

Pomoću formule (6) se integral I_n izračunava pomoću integrala I_{n-1}, integral I_{n-1} pomoću integrala I_{n-2} itd, i na kraju I_2 pomoću poznatog integrala I_1. Za $n = 2$ dobijamo iz (6)

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)},$$

pri čemu je

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} +,$$

pa je

$$I_2 = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + C.$$

Analogno možemo naći i rekurentnu formulu za izračunavanje integrala $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $(n \in N)$.

Za $n = 1$ imamo poznati integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Za $n \geq 2$ je

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = -\frac{1}{a^2}\left(\int \frac{x^2-a^2}{(x^2-a^2)^n}dx - \int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^n}\right) =$$

$$-\frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^n}\right) = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}\right),$$

dakle

$$I_n = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}\right)\ (n=2,3,4,\ldots). \quad (7)$$

Na primer, za $n = 2$ iz (7) dobijamo

$$I_2 = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2\cdot(x^2-a^2)}\right),$$

pri čemu je

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

pa je

$$I_2 = -\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + C.$$

4. Nađimo rekurentnu formulu za integral $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Ako uzmemo da je $u = \sin^{n-1} x$ i $dv = \sin x dx$, tada je $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x dx$ i $v = -\cos x$ pa je

$$\begin{aligned}I_n &= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx =\\ &= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cdot(1-\sin^2 x)dx =\\ &= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx,\end{aligned}$$

tj.

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cdot\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

konačno

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cdot\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n = 2,3,4,5\ldots). \quad (8)$$

Na primer, za $n = 2$ imamo da je

$$I_2 = \int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}I_0 =$$

$$-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

Na potpuno isti način možemo naći i rekurentnu formulu za integral

$I_n = \int \cos^n x dx \ (n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Naime, uzimajući $u = \cos^{n-1} x$ i $dv = \cos x dx$, odakle sledi da je $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \cdot \sin x dx$ i $v = \sin x$, dobijamo

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{9}$$

Na primer, za $n = 3$ je

$$\begin{aligned} I_3 = \int \cos^3 x dx &= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x dx = \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \cdot \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C, \end{aligned}$$

5. Primenom metode parcijalne integracije možemo izvesti rekurentnu formulu za integral

$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} \ (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Ako uzmemo da je $u = \dfrac{1}{\sin^{n-2} x}$ i $dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$, tada je $du = -(n-2)\dfrac{\cos x dx}{\sin^{n-1} x}$ i $v = -\operatorname{ctg} x$, pa je

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\operatorname{ctg} x \cos x dx}{\sin^{n-1} x} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^n x} dx, \end{aligned}$$

tj.

$$I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2},$$

odakle dobijamo da je

$$I_n = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \ (n = 3, 4, 5, \ldots). \tag{10}$$

Nađimo sada rekurentnu formulu i za integral

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \ (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Ako uvedemo smenu: $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$ i iskoristimo formulu (10), dobijamo

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = -\int \frac{dt}{\cos^n\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)} = -\int \frac{dt}{\sin^n t} \\
&= -\left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos t}{\sin^{n-1} t} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dt}{\sin^{n-2} t}\right) \\
&= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^{n-1}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} \\
&= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},
\end{aligned}
$$

tj.

$$
I_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \ (n = 3, 4, 5, \ldots). \tag{11}
$$

6. Izvedimo rekurentnu formulu za integral

$$
I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx,
$$

gde su m i n celi brojevi takvi da je bar jedan od njih veći od 1 i $m + n \neq 0$.

Ako je $m > 1$, uzmimo $u = \sin^{m-1} x$ i $dv = \cos^n x \sin x dx$, odakle dobijamo da je $du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx$ i $v = -\dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1}$, pa je

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx \\
&= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \cos^2 x dx \\
&= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x) dx,
\end{aligned}
$$

tj.

$$
I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\big(I_{m-2,n} - I_{m,n}\big),
$$

odakle dobijamo rekurentnu formulu

$$
I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}. \tag{12}
$$

Ako je $n > 1$, tada sličnim postupkom dobijamo rekurentnu formulu

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m,n-2}. \tag{12$'$}$$

Primer 9. Primenom formule (12) lako nalazimo da je

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{2}{\cos x} + C.$$

Ako je u gornjem integralu $m + n = 0$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$, tada imamo integral

$$I_m = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx = \int \operatorname{tg}^m x dx.$$

Za $u = \sin^{m-1} x$ i $dv = \dfrac{\sin x dx}{\cos^m x}$ dobijamo $du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx$ i $v = \dfrac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x}$, pa dobijamo rekurentnu formulu

$$I_m = \frac{1}{m-1} \cdot \operatorname{tg}^{m-1} x - I_{m-2} \ (m = 2, 3, 4, \ldots). \tag{13}$$

Slično se nalazi da je

$$I_m = \int \operatorname{ctg}^m x dx = -\frac{1}{m-1} \cdot \operatorname{ctg}^{m-1} x - I_{m-2} \ (m = 2, 3, 4, \ldots). \tag{14}$$

6. INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Kao što znamo, racionalna funkcija $R(x)$ je količnik dva polinoma. Dakle,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi sa realnim koeficijentima.

Kažemo još i da je $P(x)/Q(x)$ *racionalni razlomak.* Ako je stepen polinoma $P(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$, tada kažemo da je $P(x)/Q(x)$ *pravi razlomak,* inače je *nepravi.*

Integrali racionalnih funkcija uvek se mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija.

Pri integraciji pojedinih funkcija nećemo posebno isticati na kome intervalu vršimo integraciju, već će se podrazumevati da je to neki od intervala na kome je podintegralna funkcija definisana.

Razmotrimo sada integrale nekih prostijih racionalnih funkcija.

VIII POGLAVLJE

ODREĐENI INTEGRAL

1. DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA. DARBUOVE[35)] SUME

Problem nalaženja površine dela ravni ograničene krivom linijom doveo je do pojma određenog integrala.

Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ definisana na segmentu $[a,b]$, $a < b$. Podelimo segment $[a,b]$ pomoću tačaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ na n podsegmenata $[x_0,x_1]$ $[x_1,x_2]\ldots,[x_{n-1},x_n]$. Neka je $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ proizvoljna tačka segmenta $[x_{i-1},x_i]$ a $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ dužina segmenta $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Definicija 1. Suma

$$\sigma_P = f(\xi_1)\triangle x_1 + f(\xi_2)\triangle x_2 + \cdots + f(\xi_n)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \qquad (1)$$

naziva se *Rimanova*[36)] *integralna suma*, ili kraće, *integralna suma* funkcije $f(x)$ koja odgovara datoj podeli P segmenta $[a,b]$ na n podsegmenata i datom izboru tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Geometrijska interpretacija integralne sume (1) kada je funkcija $f(x)$ nenegativna, data je na sl. 1 i predstavlja površinu osenčene stepenaste figure, tj. sumu površina pravougaonika sa osnovicama $\triangle x_i$ i visinama $f(\xi_i)$, $(i = 1,\ldots,n)$.

Očigledno integralna suma zavisi od načina podele segmenta $[a,b]$ na podsegmente $[x_{i-1},x_i]$, kao i od izbora tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, pa se za različite podele segmenta $[a,b]$ i izbore tačaka ξ_i dobijaju različite integralne sume.

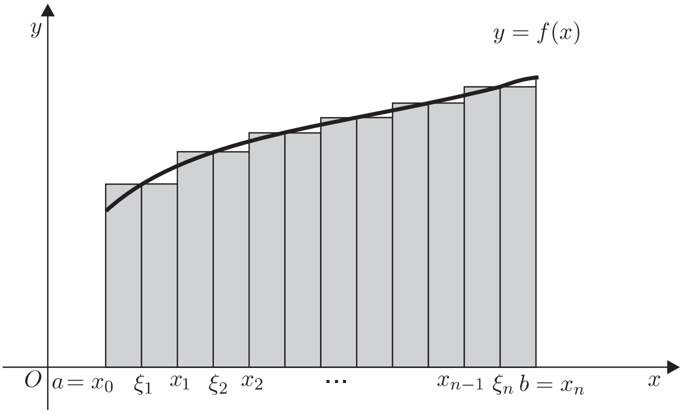
Neka je $\triangle_{\max} = \max \triangle x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ za proizvoljnu podelu p segmenta $[a,b]$.

Definicija 2. Broj I se naziva granična vrednost integralnih suma σ_p kada $\triangle_{\max} \to 0$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svaku podelu segmenta $[a,b]$ na n podsegmenata i za svaki izbor tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$, iz nejednakosti $\triangle_{\max} < \delta$ sledi nejednakost

$$|\sigma_P - I| < \varepsilon.$$

[35)] G. Darboux (1842 -1917), francuski matematičar.

[36)] B. Riemann (1826-1866), nemački matematičar.



sl. 1

Piše se $I = \lim\limits_{\triangle \max \to 0} \sigma_P$.

Definicija 3. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je *integrabilna u Rimanovom smislu*, ili kraće, *integrabilna* na segmentu $[a, b]$ ako postoji konačna granična vrednost I integralnih suma te funkcije kada $\triangle_{\max} \to 0$. Broj I naziva se *Rimanov* ili *određeni integral funkcije* $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ i piše se

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

odnosno

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i. \tag{2'}$$

Brojevi a i b su redom, *donja* i *gornja granica integrala*, $f(x)$ je *podintegralna funkcija*, x je *integraciona promenljiva.* Pri tom važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du,$$

tj. određeni integral predstavlja broj koji ne zavisi od načina označavanja integracione promenljive.

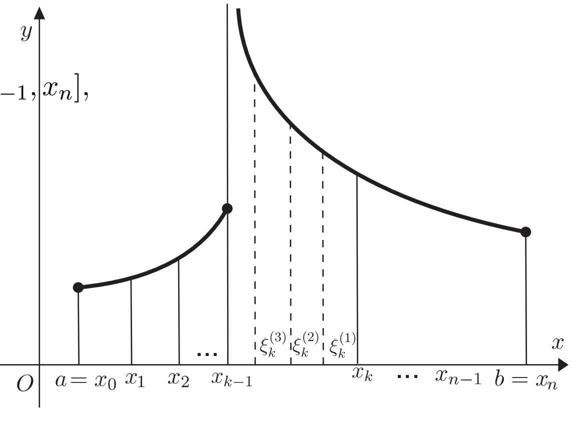
Primetimo da se u definiciji određenog integrala u jednakosti $(2')$ umesto $\triangle_{\max} \to 0$ ne može staviti $n \to +\infty$ (n je broj podsegmenata na koje je podeljen segment $[a, b]$). Naime, iz $\triangle_{\max} \to 0$ sledi $n \to +\infty$, ali obrnuto ne mora biti tačno. Na primer, ako se najduži podsegment $[x_{k-1}, x_k]$, dobijen pri prvoj podeli segmenta $[a, b]$ na n podsegmenata u sledećim podelama više ne deli, već se dele ostalih $n-1$, tada kad $n \to +\infty$, $\triangle_{\max} = \triangle x_k$ ne teži nuli.

Iz Definicije 3 sledi da je određeni integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, u slučaju kad je funkcija $f(x)$ nenegativna, jednak graničnoj vrednosti niza površina stepenastih figura obrazovanih od pravougaonika kada $\triangle_{\max} \to 0$, a što znači da je $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ jednak površini ,,krivolinijskog trapeza", tj. figure u ravni Oxy ograničene grafikom funkcije $y = f(x)$, osom Ox i pravama $x = a$ i $x = b$, a što ćemo kasnije dokazati. Videti sl. 1.

Iz definicije određenog integrala takođe sledi da neograničena funkcija na segmentu $[a, b]$ nije integrabilna na tom segmentu.

Neka je, na primer, $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a, b]$ i neka je P podela segmenta $[a, b]$ na podsegmente $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, gde je $x_0 = a$ i $x_n = b$. Ako funkcija $f(x)$ nije ograničena na segmentu $[a, b]$, tada ona nije ograničena na bar jednom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$ podele P segmenta $[a, b]$. Tada za svako $n \in N$ postoje tačke $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}, x_k]$ takve da je

$$f(\xi_k^{(n)}) > n. \qquad (3)$$



sl. 2

Vidi sl. 2.

Kako za fiksirane $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq k)$ integralna suma

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}} f(\xi_i)\triangle x_i$$

ima potpuno određenu vrednost, na osnovu (3) sledi da za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in N$, tako da je za $\xi_k^{(n_0)} \in [x_{k-1}, x_k]$

$$f(\xi_k^{(n_0)})\triangle x_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}} f(\xi_i)\triangle x_i > M,$$

tj.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(\xi_k^{(n)})\triangle x_k+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}f(\xi_i)\triangle x_i\right)=+\infty.$$

Sledi da granična vrednost integralnih suma σ_P, koje se dobijaju kada se u podsegmentu $[x_{k-1},x_k]$, kao i u podsegmentima koji se dobijaju podelom tog podsegmenta, uzimaju tačke $\xi_k^{(n)}$ $(n\in N)$, ne može biti konačna kada $\triangle_{\max}\to 0$.

Ovim smo dokazali da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1. Potreban uslov da funkcija $f(x)$ bude integrabilna na segmentu $[a,b]$ jeste da je ograničena na $[a,b]$.

Ubuduće ćemo razmatrati samo ograničene funkcije.

Definicija 4. Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na segmentu $[a,b]$ koji je tačkama $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ podeljen na n podsegmenata $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$ i neka je

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x) \text{ i } M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\quad(i=1,\dots,n).$$

Sume

$$s=m_1\triangle x_1+m_2\triangle x_2+\cdots+m_n\triangle x_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\triangle x_i$$

i

$$S=M_1\triangle x_1+M_2\triangle x_2+\cdots+M_n\triangle x_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i$$

nazivaju se redom *donja* i *gornja Darbuova suma* funkcije $f(x)$ za datu podelu segmenta $[a,b]$.

Geometrijska interpretacija donje i gornje Darbuove sume data je na sl. 3 i sl. 4.

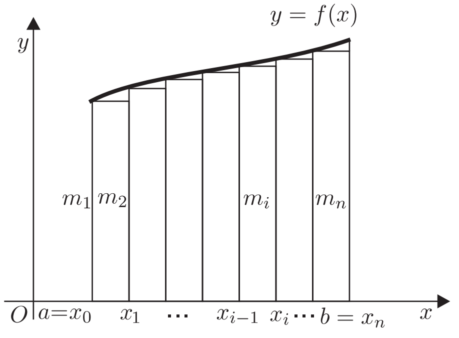
Svaka integralna suma (1) za datu podelu segmenta $[a,b]$ nalazi se između gornje i donje Darbuove sume te podele.

Zaista, ako je

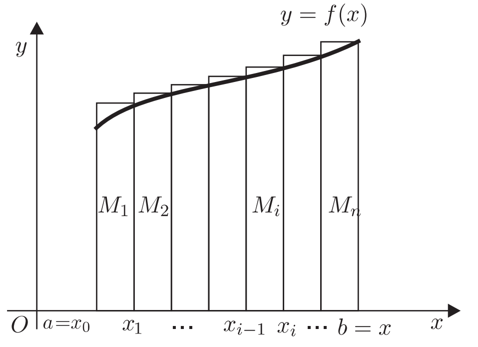
$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x) \text{ i } m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

tada je za proizvoljne $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$m\le m_i\le f(\xi_i)\le M_i\le M\ (i=1,2,\dots,n),$$



sl. 3



sl. 4

tj.

$$m\triangle x_i \leq m_i\triangle x_i \leq f(\xi_i)\triangle x_i \leq M_i\triangle x_i \leq M\triangle x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

odnosno

$$m\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_i \leq M\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i,$$

konačno

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b-a). \tag{4}$$

Iz nejednakosti (4) sledi da su za sve podele segmenta $[a, b]$ skupovi: donjih Darbuovih suma s, integralnih suma σ i gornjih Darbuovih suma S ograničeni.

Pokažimo da za skup integralnih suma σ_P, koje dobijamo za fiksiranu podelu P segmenta $[a, b]$ i različite izbore tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, važi

$$s = \inf\{\sigma_P\}, \quad S = \sup\{\sigma_P\}. \tag{5}$$

Kako je, na osnovu (4), $s \leq \sigma_P$ za sve integralne sume σ_P podele P, treba još da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji suma σ_P, takva da je $\sigma_P < s + \varepsilon$.

Zaista, ako tačke ξ_i izaberemo tako da je

$$f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tada je

$$\sigma_P - s = \sum_{i=1}^{n}\big(f(\xi_i) - m_i\big)\triangle x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

tj.

$$\sigma_p < s + \varepsilon.$$

Ovim smo dokazali prvu jednakost. Druga jednakost se dokazuje analogno.

Definicija 5. Ako je skup tačaka podele P segmenta $[a, b]$ podskup skupa tačaka podele P' tog segmenta, tada kažemo da je podela P' *profinjenje* podele P.

Tvrđenje 2. Ako su s i S donja i gornja Darbuova suma podele P, a s' i S' donja i gornja Darbuova suma podele P' koja je profinjenje podele P, tada je

$$s \leq s' \leq S' \leq S.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da tvrđenje važi u slučaju kad je podela P' realizovana sa jednom tačkom više. Neka je podela P realizovana pomoću tačaka $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, a podela P' pomoću tačaka $a = x_0 < x' < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Ako je $s^* = \sum\limits_{i=2}^{n} m_i \triangle x_i$, tada je

$$s = m_1(x_2 - x_1) + s^*,$$

a ako je $m_1' = \inf\limits_{x \in [x_0, x']} f(x)$ i $m_1'' = \inf\limits_{x \in [x', x_1]} f(x)$, tada je

$$s' = m_1'(x' - x_0) + m_1''(x_1 - x') + s^*.$$

Kako je

$$m_1 = \min\{m_1', m_1''\},$$

to je

$$m_1(x_1 - x_0) = m_1(x' - x_0) + m_1(x_1 - x') \leq m_1'(x' - x_0) + m_1''(x_1 - x'),$$

pa sledi da je

$$s \leq s'.$$

Analogno se dokazuje da je $S' \leq S$.

Posledica 1. Ako je s_1 donja Darbuova suma podele P_1 i S_2 gornja Darbuova suma podele P_2, tada je

$$s_1 \leq S_2.$$

Zaista, ako je P podela koju realizuju sve tačke podela P_1 i P_2 i ako su s i S donja i gornja Darbuova suma podele P, tada je na osnovu prethodnog tvrđenja

$$s_1 \leq s \leq S \leq S_2,$$

što je i trebalo dokazati.

Iz Tvrđenja 2 i Posledice 1 sledi da je za sve podele skup donjih Darbuovih suma s ograničen odozgo, na primer, bilo kojom gornjom Darbuovom sumom, a da je skup gornjih Darbuovih suma S ograničen odozdo, na primer, bilo kojom donjom Darbuovom sumom, a što znači da postoje konačni

$$I_* = \sup\{s\} \text{ i } I^* = \inf\{S\}$$

i pri tome je za sve sume s i S

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S. \tag{6}$$

Tvrđenje 3. Funkcija $f(x)$, ograničena na segmentu $[a, b]$, je integrabilna na tom segmentu *akko* je

$$\lim_{\triangle_{\max} \to 0} (S - s) = 0. \tag{7}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i da je $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Na osnovu Definicije 2 i Definicije 3 to znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za sve podele segmenta $[a, b]$ i sve izbore tačaka ξ_i za integralne sume σ funkcije $f(x)$ važi:

ako je $\triangle_{\max} < \delta$, tada je $|\sigma - I| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, tj. $I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Iz (5) sledi da za odgovarajuće donje i gornje Darbuove sume s i S važi:

ako je $\triangle_{\max} < \delta$, tada je $0 \leq S - s \leq \varepsilon$, tj. $\displaystyle\lim_{\triangle_{\max} \to 0} (S - s) = 0$,

dakle, važi (7).

Pretpostavimo sada da važi (7). To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za sve podele segmenta $[a, b]$, takve da je $\triangle_{\max} < \delta$ važi

$$S - s < \varepsilon, \tag{8}$$

što, s obzirom na (6), znači da je $I_* = I^*$. Ako stavimo da je $I_* = I^* = I$, tada nejednakost (6) prelazi u nejednakost

$$s \leq I \leq S. \tag{9}$$

Kako, prema (4), za Darbuove sume s i S i odgovarajuću integralnu sumu σ važi

$$s \leq \sigma \leq S, \tag{10}$$

zaista, na osnovu poslednje tri nejednakosti, sledi da važi

$$\text{ako je } \triangle_{\max} < \delta, \text{ tada je } |I - \sigma| < \varepsilon,$$

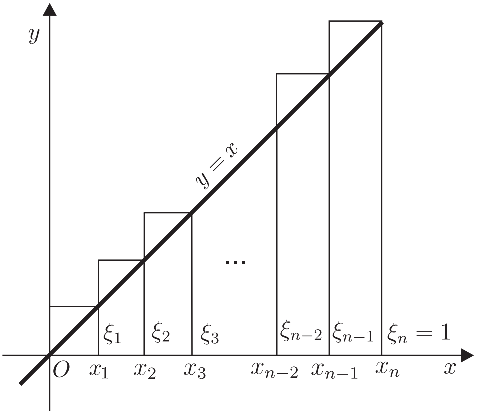
tj.

$$I = \lim_{\triangle_{\max} \to 0} \sigma,$$

a što i znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$, što je trebalo i dokazati.

Napomenimo da se brojevi $I_* = \sup_P \{s\}$ i $I^* = \inf_P \{S\}$ nazivaju redom *donji* i *gornji Darbuov integral.* Može se dokazati da je

$$I_* = \lim_{\triangle_{\max} \to 0} s \text{ i } I^* = \lim_{\triangle_{\max} \to 0} S.$$



sl. 5

Primer 1. Izračunati $\int_0^1 x dx$ korišćenjem definicije određenog integrala.

Podelimo interval $[0, 1]$ na n jednakih podintervala dužine $\triangle x = \dfrac{1}{n}$ i za tačke ξ_k uzmimo desne krajeve podintervala, tj.

$$\xi_1 = \triangle x,\ \xi_2 = 2\triangle x, \dots, \xi_n = n\triangle x$$

(videti sliku 5).

Nađimo integralnu sumu

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot \triangle x) \cdot \triangle x = \sum_{i=1}^{n} i(\triangle x)^2 \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)(\triangle x)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Na osnovu Definicije 3 sledi da je

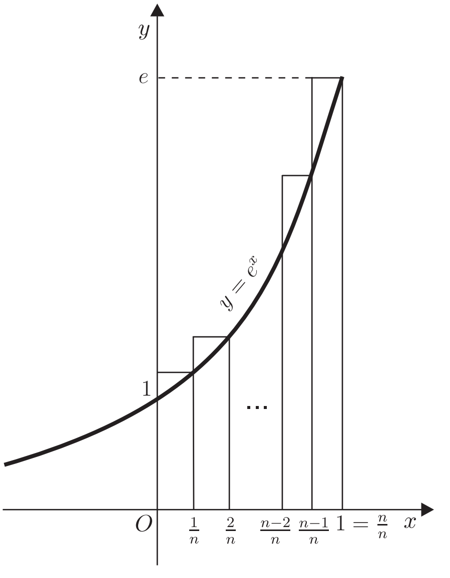
$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \to \infty} \sigma = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Primer 2. Izračunati $\displaystyle\int_0^1 e^x dx$.

Na osnovu definicije određenog integrala je (vidi sl. 6)

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{i\cdot\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Big(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}}\Big)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}}\Big(1 + e^{\frac{1}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-2}{n}} + e^{\frac{n-1}{n}}\Big)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}$$
$$= e - 1, \text{ jer je}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1.$$



sl. 6

2. NEKE KLASE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Videli smo da neograničene funkcije nisu integrabilne. Isto tako, ni svaka ograničena funkcija nije integrabilna, kao što to pokazuje primer *Dirihleove*[37] *funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalno,} \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalno.} \end{cases}$$

Naime, ako su ξ_i racionalne tačke, tada je integralna suma (1) jednaka $\sum\limits_{i=1}^{n} \triangle x_i = b - a$, jer je $f(\xi_i) = 1$, a ako su ξ_i iracionalne tačke, tada je integralna suma jednaka 0, jer je $f(\xi_i) = 0$; prema tome, granična vrednost integralne sume ne postoji, tj. Dirihleova funkcija, iako ograničena, nije integrabilna.

Ovde ćemo pokazati da su neprekidne, neke prekidne i monotone funkcije integrabilne funkcije.

Tvrđenje 4. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada je $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz. Pošto, na osnovu Tvrđenja 14, odeljka 2.4, V poglavlja iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ sledi njena ravnomerna nepre-

[37] P. G. Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar.

IX POGLAVLJE

REALNE FUNKCIJE VIŠE REALNIH PROMENLJIVIH

1.REALNA FUNKCIJA DVE REALNE PROMENLJIVE

1.1. Uvodni pojmovi

Kao što znamo, skup svih uređenih parova realnih brojeva $R^2 = \{(x_1, x_2) | x_1,\ x_2 \in R\}$, u kome su sabiranje i množenje skalarom definisani na sledeći način:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_1 + y_2).$$
$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \quad (\lambda \in R),$$

je vektorski prostor nad poljem R.

Ako za proizvoljne $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$ iz R^2 stavimo

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2, \tag{1}$$

lako je proveriti da je sa (1) definisan skalarni proizvod u R^2, što znači da je vektorski prostor R^2 sa definisanim skalarnim proizvodom jedan euklidski vektorski prostor.

Elemente od R^2 predstavljaćemo tačkama euklidske ravni E_2 u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxy. Ako je M tačka iz E_2 kojom smo predstavili uređen par $(x, y) \in R^2$, tada ćemo element (x, y) označavati sa $M(x, y)$ ili prosto sa M. U skladu sa ovim, elemente skupa R^2 zvaćemo tačkama.

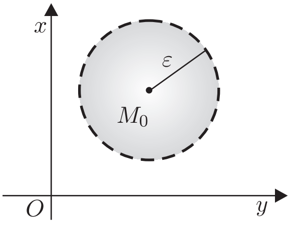
Iz (1) sledi pojam rastojanja u R^2. Naime, rastojanje između tačaka $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ iz R^2 je

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Uvedimo sada neke pojmove.

Definicija 1. Pod *ε-okolinom* ($\varepsilon > 0$) tačke $M_0 \in R^2$ podrazumevamo skup tačaka $M \in R^2$, takvih da je $d(M, M_0) < \varepsilon$.

U ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy ε-okolina tačke M_0 predstavlja skup svih tačaka M koje se nalaze u unutrašnjosti kruga poluprečnika ε sa centrom u tački M_0 (sl. 1).



sl. 1

Definicija 2. Skup $X \subset R^2$ je *otvoren* ako za svaku tačku $M \in X$ postoji ε-okolina koja je podskup od X.

Definicija 3. Skup $X \subset R^2$ je *zatvoren* ako je skup $R \setminus X$ otvoren.

Definicija 4. Pod *granicom* ili *rubom* skupa $X \subset R^2$ podrazumevamo skup $\Gamma_X \subset R^2$, takav da svaka ε-okolina proizvoljne tačke $M \in \Gamma_X$ sadrži i tačke iz X i iz $R \setminus X$.

Definicija 5. Pod *okolinom* tačke M podrazumevamo svaki otvoren skup koji sadrži tačku M.

Definicija 6. Skup tačaka $M \in R^2$, takvih da je $d(M_0, M) \leq R$ $(R > 0)$ je *zatvorena dvodimenzionalna kugla* (*lopta*) poluprečnika R sa centrom u tački M_0.

Ako je $d(M_0, M) < R$, tada je skup tačaka M *otvorena dvodimenzionalna kugla* (lopta).

Primetimo da je ε-okolina tačke M_0, u stvari, jedna otvorena dvodimenzionalna kugla (lopta) poluprečnika ε sa centrom u tački M_0.

Definicija 7. Skup $X \subset R^2$ je *ograničen* ako sve njegove tačke pripadaju nekoj dvodimenzionalnoj kugli.

Definicija 8. Za skup $X \subset R^2$ kažemo da je *povezan* ako za bilo koje dve tačke $M, N \in X$ postoji neprekidna linija koja prolazi kroz M i N i pripada skupu X.

Definicija 9. Otvoren i povezan skup naziva se *oblast*.

Zatvoren i povezan skup naziva se *zatvorena oblast*.

Definicija 10. Tačka M je *tačka nagomilavanja* skupa X ako se u svakoj njenoj ε-okolini nalazi bar jedna tačka iz X različita od M.

Definicija 11. Neka je $D \subset R^2$ neprazan skup. Ako se svakoj tački $M(x, y) \in D$ pridruži, prema zakonu (pravilu) f, tačno jedan realan broj z, tada je f *realna funkcija dve realne promenljive*.

Pišemo

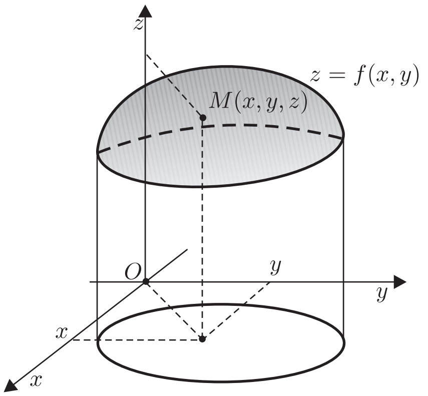
$$z = f(x, y) \quad \text{ili} \quad z = f(M).$$

Promenljive x i y su *nezavisno promenljive* ili *argumenti*, z je *zavisno promenljiva* ili *funkcija*. Skup D je *domen*, a skup

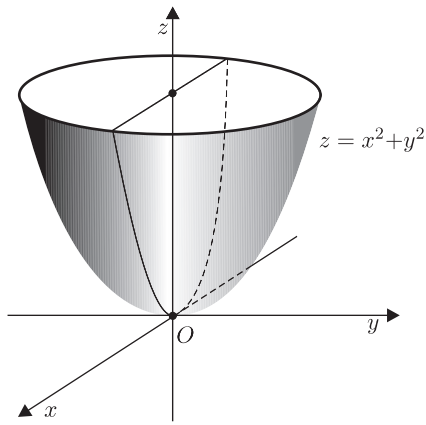
$$V = \{z \in R | z = f(x,y) \wedge (x,y) \in D\}$$

skup vrednosti funkcije f.

Grafik funkcije $z = f(x,y)$ je geometrijsko mesto tačaka $M(x,y,z)$ u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$, takvih da je $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ (sl. 2).



sl. 2



sl. 3

Grafik funkcije $z = f(x,y)$ može predstavljati površ u koordinatnom sistemu $Oxyz$. Tada kažemo da je $z = f(x,y)$ jednačina te površi.

Primer 1. Funkcija $z = x + 2y$ definisana je za svako $(x,y) \in R^2$.

Primer 2. Funkcija $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ definisana je, tj. z je realan broj, ako je $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, tj. $x^2 + y^2 \leq 4$, pa je domen funkcije skup $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Primer 3. Grafik funkcije $z = x^2 + y^2$ je, kao što znamo iz analitičke geometrije, kružni paraboloid (sl. 3).

1.2. Granična vrednost i neprekidnost funkcije dve promenljive

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na skupu D i neka je $M_0(x_0,y_0)$ tačka nagomilavanja skupa D.

Definicija 12. Broj c je *granična vrednost* funkcije $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ (koji zavisi od ε), tako da za svaku tačku $M(x,y)$ za koju važi $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, tj. $0 < d(M, M_0) < \delta$, važi nejednakost $|f(x,y) - c| < \varepsilon$, tj. $|f(M) - c| < \varepsilon$.

Piše se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=c \quad \text{ili} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=c \quad \text{ili} \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=c.$$

Sadržaj Definicije 12 može se zapisati na sledeći način:

$$c=\lim_{M\to M_0} f(x,y) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall M)(0<d(M,M_0)<\delta\Rightarrow f(M)-c|<\varepsilon).$$

Lako je videti da važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1. Potreban i dovoljan uslov da funkcija $z=f(x,y)$ ima graničnu vrednost c u tački $M_0(x_0,y_0)$ je da se ona može predstaviti u obliku

$$f(x,y)=c+\alpha(x,y),$$

gde je $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha(x,y)=0$.

Treba razlikovati graničnu vrednost $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ od *ponovljenih* (*uzastopnih*) graničnih vrednosti:

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) \quad \text{i} \quad \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)).$$

Primer 4. Ponovljene granične vrednosti funkcije $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ u tački $(0,0)$ su:

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1$$

i

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1.$$

Međutim, granična vrednost $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. Zaista, ako tačka (x,y) teži tački $(0,0)$ preko dva niza: $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ i $(x_n',y_n')=\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ $(n\to+\infty)$, odgovarajući nizovi vrednosti funkcije teže različitim granicama: $z_n=f(x_n,y_n)=0\to0$, $z_n'=f(x_n',y_n')=\dfrac{1}{3}\to\dfrac{1}{3}$ $(n\to+\infty)$.

Primer 5. Ponovljene granične vrednosti funkcije $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ u tački $(0,0)$ su:

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\frac{0}{0+y^2}=0$$

i

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0}=0,$$

dakle, jednake su.

Međutim, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji. Zaista, ako $(x,y)\to(0,0)$ po pravoj $y=kx$ $(k\in R)$, tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

što za razne vrednosti k ima različite vrednosti.

Primer 6. Data je funkcija $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$. Pokažimo da postoje granične vrednosti $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ i $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, a da ne postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$. Zaista,

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(0\cdot\sin\frac{1}{y}\right)=0.$$

Kako je

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\le|x|\cdot 1=|x|,$$

sledi da je

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y}=0.$$

Međutim, granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$.

Iz datih primera vidi se da iz postojanja granične vrednosti funkcije u datoj tački ne sledi postojanje i ponovljenih graničnih vrednosti u toj tački i obrnuto - iz postojanja ponovljenih graničnih vrednosti funkcije ne sledi postojanje i granične vrednosti funkcije u odgovarajućoj tački. Ovo ne znači da se ne može uspostaviti određena veza između ove dve vrste graničnih vrednosti funkcije dve promenljive.

Tvrđenje 2. Ako postoji granična vrednost funkcije $z=f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ i ako postoji $\delta>0$, takvo da za svako $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$, $y\ne y_0$ postoji granična vrednost

$$g(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

tada postoji i ponovljena granična vrednost $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ i pri tome je

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

X POGLAVLJE

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Kod izučavanja raznih pojava često nije moguće ustanoviti zakonitost koja povezuje (samo) veličine koje karakterišu datu pojavu, dok se relativno lako nalazi zavisnost između tih veličina i njihovih izvoda. Na taj način se proučavanje pojava (procesa) opisuje relacijom koja povezuje traženu funkciju i njene izvode ili diferencijale, tj. nekom diferencijalnom jednačinom.

Definicija 1. *Diferencijalnom jednačinom* naziva se relacija

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

koja povezuje nezavisno promenljivu x, nepoznatu funkciju $y = y(x)$ i njene izvode $y', y'', \dots, y^{(n)}$ (ili diferencijale dy, d^2y,... $d^{(n)}y$).

Redom diferencijalne jednačine (1) naziva se red najvišeg izvoda (ili diferencijala) koji se pojavljuje u datoj jednačini.

Rešenjem diferencijalne jednačine (1) naziva se n puta diferencijabilna funkcija $y = y(x)$ koja identički zadovoljava datu jednačinu za svako x iz nekog segmenta $[a, b]$.

Postupak nalaženja rešenja diferencijalne jednačine naziva se *integracijom* date jednačine (dakle, primenjujemo operaciju inverznu operaciji diferenciranja), a grafik rešenja $y = y(x)$ naziva se *integralnom krivom* diferencijalne jednačine.

Ovde ćemo razmatriti neke diferencijalne jednačine *prvog* i *drugog* reda.

1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Definicija 2. Opšti oblik diferencijalne jednačine prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Ako se jednačina (2) može rešiti po y', dobijamo tzv. *normalni oblik* diferencijalne jednačine:

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Odgovor na pitanje pod kojim pretpostavkama postoji jedinstveno rešenje diferencijalne jednačine (3) daje sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1 (*Košijeva teorema*). Ako su funkcija $f(x, y)$ i njen parcijalni izvod $f'_y(x, y)$ neprekidni u nekoj oblasti D ravni xOy, tada postoji interval $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x_0 \in D$ na kojem postoji jedinstveno rešenje $y = y(x)$ jednačine (3) koje zadovoljava uslov $y(x_0) = y_0$.

Geometrijski, to znači da kroz svaku unutrašnju tačku (x_0, y_0) oblasti D prolazi samo jedna integralna kriva jednačine (3).

Problem nalaženja rešenja $y = y(x)$ jednačine (3), koje zadovoljava uslov $y(x_0) = y_0$, naziva se *Košijevim problemom*, a uslov $y(x_0) = y_0$ - *početnim uslovom*.

Definicija 3. *Opštim rešenjem* diferencijalne jednačine (3) naziva se funkcija $y = y(x, C)$, gde je C – proizvoljna konstanta ako:

1) ona predstavlja rešenje date diferencijalne jednačine za svaku vrednost konstante C;

2) za bilo koji početni uslov $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$ može se odrediti jedinstvena vrednost konstante $C = C_0$, tako da je $y_0 = y(x_0, C_0)$.

Ako je opšte rešenje dato u implicitnom obliku

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

tada se jednačina (4) naziva *opštim integralom* diferencijalne jednačine (3).

Geometrijski, opšte rešenje $y = y(x, C)$ predstavlja familiju integralnih krivih koje zavise od jednog parametra C i imaju osobinu da kroz jednu tačku ravni xOy prolazi samo jedna kriva toga skupa.

Definicija 4. *Partikularnim rešenjem* diferencijalne jednačine (3) nazivamo rešenje $y = y(x, C_0)$ koje se dobija iz opšteg rešenja $y = y(x, C)$ za konkretnu vrednost konstante $C = C_0$. Ako u relaciji (4) stavimo $C = C_0$, dobijamo *partikularni integral* diferencijalne jednačine.

Primer 1. Pokazati da je funkcija $y = y(x)$ definisana jednačinom $x^2 + 4xy - y^2 = 1$ integral diferencijalne jednačine $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$.

Rešenje. Diferenciranjem leve i desne strane jednačine $x^2 + 4xy - y^2 = 1$ po promenljivoj x dobijamo $2x+4y+4xy'-2yy' = 0$, odnosno $y'(4x-2y)+2x+4y = 0$. Deobom sa 2 i množenjem sa dx dobijene jednačine (imajući u vidu da je $y' = \dfrac{dy}{dx}$) dobijamo $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$.

1.1. Diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim

U specijalnom slučaju, kada je u diferencijalnoj jednačini

$$y' = f(x, y)$$

funkcija $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, imamo

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),$$

a odavde, deobom sa $f_2(y)$, uz uslov $f_2(y) \neq 0$, dobijamo

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{5}$$

Jednačina (5) se naziva *diferencijalnom jednačinom sa razdvojenim promenljivim.* Opšti oblik jednačine ovog tipa daćemo u sledećoj definiciji.

Definicija 5. Diferencijalna jednačina oblika

$$A_1(x)B_1(y)dx + A_2(x)B_2(y)dy = 0, \tag{6}$$

gde su $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(y)$, $B_2(y)$ – date funkcije, naziva se *diferencijalnom jednačinom sa razdvojenim promenljivim.*

Ako su $B_1(y) \neq 0$ i $A_2(x) \neq 0$, tada, deobom jednačine (6) sa $A_2(x)B_1(y)$ dobijamo jednačinu:

$$\frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx = -\frac{B_2(y)}{B_1(y)}dy,$$

oblika (5) u kojoj su promenljive razdvojene. Integracijom leve i desne strane ove jednačine dobijamo

$$\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx = -\int \frac{B_2(y)}{B_1(y)}dy + C. \tag{7}$$

Ako relacija (7) sadrži sva rešenje diferencijalne jednačine (6), tada (7) predstavlja opšti integral diferencijalne jednačine (6).

Kod razdvajanja promenljivih mogu se izgubiti neka rešenja jednačine (6): to su rešenja jednačina $A_2(x) = 0$ i $B_1(y) = 0$. Ako je $y = y_0$ koren jednačine $B_1(y) = 0$, tada, pošto je $dy_0 = 0$ i $B_1(y_0) = 0$, zamenom $y = y_0$ u jednačini (6) dobijamo identitet. Dakle, $y = y_0$ je za svako x rešenje diferencijalne jednačine (6). Ako se to rešenje ne može dobiti iz relacije (7) za neku vrednost C, onda se ono mora razmatrati odvojeno od rešenja (7). Analogno zaključujemo, ako je $x = x_0$ koren jednačine $A_2(x) = 0$, da je tada $x = x_0$ za svako y rešenje diferencijalne jednačine (6).

Ako se integrali iz relacije (7) ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija, tada kažemo da je rešenje diferencijalne jednačine izraženo u *kvadraturama* (i u tom slučaju, takođe, smatramo da je problem integracije diferencijalne jednačine rešen).

Primer 2. Naći jednačinu familije krivih znajući da je tangens ugla tangente u svakoj tački bilo koje krive iz familije krivih jednak količniku ordinate i apscise te tačke uzetom sa negativnim znakom.

Rešenje. Neka je jednačina krive tražene familije krivih $y = y(x)$. Tangens ugla tangente te krive je u svakoj njenoj tački jednak $y'(x)$. Prema uslovima zadatka, tangens je jednak $-\frac{y}{x}$. Odavde sledi diferencijalna jednačina tražene familije: $y' = -\frac{y}{x}$, odnosno, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Množenjem leve i desne strane sa $\frac{dx}{y}$, $y \neq 0$ dobijamo jednačinu sa razdvojenim promenljivim

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

Integracijom dobijamo $\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|$ ili $xy = C$. Prema tome, datu osobinu ima familija hiperbola čije su asimptote koordinatne ose.

Primer 3. Naći ono partikularno rešenje jednačine

$$3x\sqrt[3]{y}dx + (1 - x^2)dy = 0$$

koje zadovoljava početni uslov $y(0) = 0$.

Rešenje. Množenjem leve i desne strane jednačine sa $\frac{1}{\sqrt[3]{y}(1 - x^2)}$, $y \neq 0$, $x \neq \pm 1$, dobijamo jednačinu sa razvijenim promenljivim:

$$\frac{3x}{1 - x^2}dx + \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = 0.$$

Integracijom dobijamo $-\frac{3}{2}\ln|1 - x^2| + \frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{3}{2}\ln C$, $C > 0$, odakle množenjem sa $\frac{2}{3}$ i sređivanjem dobijamo opšti integral jednačine $y^{2/3} = \ln C|1 - x^2|$. Zamenom početnog uslova $x = 0$, $y = 0$ u opštem integralu, dobijamo $0 = \ln C$, odakle je $C = 1$. Prema tome, partikularni integral dobijamo uvrštavanjem ove vrednosti konstante C u opštem integralu: $y^{2/3} = \ln|1 - x^2|$. Rešavanjem ove jednačine po y, dobijamo traženo partikularno rešenje: $y = \sqrt{\ln^3|1 - x^2|}$.

1.2. Homogena diferencijalna jednačina prvog reda

Ovde ćemo razmotriti diferencijalne jednačine koje se određenom smenom svode na diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivim.

Definicija 6. Funkcija $f(x, y)$ se naziva *homogenom funkcijom reda* k u odnosu na promenljive x i y ako važi identitet:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

za svako $t \in R$.

Primer 4. Funkcija $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x(x^2+y^2)}}{\sqrt{y^3}}$ je homogena funkcija nultog reda jer je

$$f(tx,ty)=\frac{\sqrt{tx(t^2x^2+t^2y^2)}}{\sqrt{t^3y^3}}=t^0f(x,y).$$

Definicija 7. Diferencijalna jednačina prvog reda

$$y'=f(x,y) \tag{8}$$

naziva se *homogenom* (po x i y) ako je $f(x,y)$ – homogena funkcija nultog reda.

Dakle, ako je jednačina (8) homogena, tada je

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Ako uzmemo $t=\dfrac{1}{x}$, dobijamo $f(x,y)=f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, tj. homogena funkcija nultog reda se može predstaviti u obliku funkcije jednog argumenta $\dfrac{y}{x}$. Ako uvedemo novu funkciju $u=u(x)$ umesto funkcije $y=y(x)$ smenom

$$u=\frac{y}{x},\quad y=ux,\quad y'=u'x+u$$

i zamenimo dobijene izraze za y i y' u jednačini (8) dobijamo jednačinu

$$u'x+u=\varphi(u),$$

tj.

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\varphi(u)-u.$$

Odavde, množenjem sa $\dfrac{dx}{x}\dfrac{1}{\varphi(u)-u}$, gde je $x\neq 0$, $\varphi(u)\neq u$, dobijamo jednačinu sa razdvojenim promenljivim

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

a odatle integracijom,

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

i zamenom u sa $\dfrac{y}{x}$ posle integracije, dobijamo opšte rešenje ili opšti integral homogene jednačine (8).

Primer 5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2y'e^{x/y} = xye^{x/y} + y^2.$$

Rešenje. Zamenom $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, pri čemu je $x = x(y)$ nepoznata funkcija, dobijamo

$$x^2\frac{1}{x'}e^{\frac{x}{y}} = xye^{\frac{x}{y}} + y^2.$$

Odavde, množenjem jednačine sa $\dfrac{x'}{y^2}$, $y \neq 0$, sledi:

$$\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} \cdot x' + x'.$$

Pošto je jednačina homogena, uvodimo smenu $u = \dfrac{x}{y}$, $u = u(y)$. Odavde dobijemo $x = u \cdot y$, $x'(y) = u + u'y$. Zamenom dobijenih izraza za x i x' u jednačini dobijamo:

$$u^2e^u = u \cdot e^u(u + u'y) + u + u'y.$$

Odavde sledi

$$u'(u \cdot ye^u + y) = -u,$$

odnosno

$$\frac{du}{dy} \cdot y(ue^u + 1) = -u.$$

Odavde, množenjem jednačine sa $\dfrac{dy}{y \cdot u}$, uz uslov $y \neq 0$, $u \neq 0$, dobijamo jednačinu sa razdvojenim promenljivim:

$$\left(e^u + \frac{1}{u}\right) du = -\frac{dy}{y}.$$

Integracijom dobijamo opšte rešenje: $e^u + \ln|u| = -\ln|y| + \ln|C|$, odakle zamenom $u = \dfrac{x}{y}$ sledi $e^{\frac{x}{y}} = -\ln\left|\dfrac{x}{y}\right| - \ln|y| + \ln|C|$, $e^{\frac{x}{y}} = \ln\left|\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} \cdot C\right|$, $e^{\frac{x}{y}} = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$.

1.3. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

Definicija 8. *Linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda* naziva se jednačina

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{9}$$

linearna po nepoznatoj funkciji y i njenom izvodu y', gde su $P(x)$ i $Q(x)$ – funkcije argumenta x.

Ako je $Q(x) = 0$, tada se jednačina (9) naziva *linearnom homogenom*, a ako je $Q(x) \neq 0$ – *linearnom nehomogenom*.Postoji nekoliko metoda za rešavanje linearne diferencijalne jednačine (9). Ovde ćemo izložiti dve metode.

Prvo ćemo izložiti *metodu smene*. Ona se sastoji u tome da rešenje diferencijalne jednačine (9) tražimo u obliku proizvoda dveju diferencijabilnih funkcija:

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{10}$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$y' = u'v + uv' \tag{11}$$

i zamenom y i y' iz (10) i (11) u jednačini (9) dobijamo:

$$u'v + uv' + P \cdot u \cdot v = Q,$$

odnosno

$$u'v + u(v' + Pv) = Q, \tag{12}$$

gde smo koristili kraće oznake u, v, P, Q za funkcije $u(x)$, $v(x)$, $P(x)$ i $Q(x)$ redom.

Odredimo funkciju v iz uslova

$$v' + P \cdot v = 0. \tag{13}$$

Tada se jednačina (12) svodi na jednačinu

$$u'v = Q. \tag{14}$$

Jednačina (13) je jednačina sa razdvojenim promenljivim. Napišimo je u obliku

$$\frac{dv}{dx} = -Pv,$$

i pomnožimo sa $\dfrac{dx}{v}$, $v \neq 0$. Dobijamo $\dfrac{dv}{v} = -Pdx$, a odatle integracijom, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int Pdx$. Opšte rešenje ove jednačine je

$$\ln|v| = -\int Pdx + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

tj.

$$|v| = C_1 e^{-\int Pdx}.$$

Uzmimo za funkciju $v(x)$ bilo koje partikularno rešenje različito od nule, na primer:

$$v = e^{-\int P dx}. \tag{15}$$

Zamenom v iz (15) u jednačini (14), dobijamo jednačinu sa razdvojenim promenljivim:

$$u' \cdot e^{-\int P dx} = Q,$$

odakle sledi

$$u' = \frac{du}{dx} = Qe^{\int P dx},$$

odnosno,

$$du = Qe^{\int P dx} dx.$$

Integracijom dobijamo

$$u = C + \int Qe^{\int P dx} dx. \tag{16}$$

Zamenom dobijenih rešenja u i v iz (15) i (16) u relaciji (10) dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine (9):

$$y = e^{-\int P dx} \left(C + \int Qe^{\int P dx} dx \right). \tag{17}$$

Druga metoda za rešavanje jednačine (9) je tzv. *Lagranžova* metoda varijacije konstanata. Postupamo na sledeći način. Prvo nalazimo opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$y' + Py = 0 \tag{18}$$

u kojoj se promenljive mogu razdvojiti:

$$\frac{dy}{y} = -P dx.$$

Odavde, posle integracije, dobijamo

$$\ln |y| = \ln C_1 - \int P dx, \quad C_1 > 0$$

pa je

$$|y| = C_1 e^{-\int P dx} \tag{19}$$

opšte rešenje linearne homogene jednačine (18).

Lagranžova metoda se sastoji u tome da opšte rešenje nehomogene jednačine (9) tražimo u obliku opšteg rešenja homogene jednačine, ali smatrajući C_1 ne konstantom, već funkcijom argumenta x, dakle, u obliku

$$y = C_1(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{20}$$

Funkciju $C_1 = C_1(x)$ odredićemo tako da funkcija (20) bude opšte rešenje jednačine (9). Zato nađimo

$$y' = C_1'e^{-\int Pdx} - C_1 \cdot P \cdot e^{\int Pdx}$$

i zamenimo y' i y iz (20) u jednačini (9):

$$C_1'e^{-\int Pdx} - C_1Pe^{-\int Pdx} + C_1P^{-\int Pdx} = Q.$$

Dobili smo jednačinu sa razdvojenim promenljivim

$$\frac{dC_1}{dx} = Qe^{\int Pdx}, \quad \text{odnosno} \quad dC_1 = Qe^{\int Pdx}dx.$$

Integracijom dobijamo

$$C_1(x) = C + \int Qe^{\int Pdx}dx$$

i zatim, zamenom $C_1(x)$ u relaciji (20), dobijamo opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine (9).

Primer 6. Naći ono partikularno rešenje jednačine

$$xy' \ln x = y + \ln x$$

koje zadovoljava početni uslov $y(e^2) = 2\ln 2$.

Rešenje. Deobom leve i desne strane jednačine sa $x\ln x$, gde je $x \ln x \neq 0$ dobijamo jednačinu

$$y' - \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x},$$

čije opšte rešenje, pošto je jednačina linearna, nalazimo po formuli (17):

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) = e^{\int \frac{dx}{x\cdot\ln x}}\left(C + \int \frac{1}{x}e^{-\int \frac{dx}{x\cdot\ln x}}dx\right) =$$

$$= e^{\ln|\ln x|}\left(C + \int \frac{1}{x}e^{-\ln|\ln x|}dx\right) = \ln x\left(C + \int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx\right) = \ln x(C + \ln|\ln x|).$$

Opšte rešenje je, dakle, $y = \ln x(C + \ln|\ln x|)$. Zamenom početnog uslova $x = e^2$, $y = 2\ln 2$ u opštem rešenju dobijamo $2\ln 2 = 2(C + \ln 2)$ odakle sledi $C = 0$. Zamenom $C = 0$ u opštem rešenju dobijamo traženo partikularno rešenje $y = \ln x \cdot \ln|\ln x|$.